

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera teoretică, profil umanist

Clasa a XII-a

I). Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}, m \in R.$$

- a) Să se rezolve sistemul pentru $m=2$;
- b) Să se determine minimul expresiei $E = x^2 + y^2 + z^2$, unde x, y, z sunt soluțiile sistemului pentru $m=1$.

II). Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

- a) Să se arate că dacă $X \in M_3(R)$, astfel încât $AX = XA$ și $X^2 = O_3$ atunci $X = O_3$.
- b) Dacă $X \in M_3(R)$ astfel ca $AX = XA$ și $X^{1024} = O_3$ atunci $X = O_3$.

III). Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

- a) Să se verifice că $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, (\forall)x \in R$;
- b) Știind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea "*" și e_2 este elementul neutru în raport cu legea "o" să se calculeze $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$.

IV). Într-un raft din bucătărie de tipul 3×3 , mama lui Vlad așează în fiecare căsuță mere sau portocale, după plac. Asociem astfel fiecărei configurații a raftului o matrice de tipul 3×3 cu elemente egale cu 1 sau -1 după cum în căsuța asociată din raft mama lui Vlad pune un măr sau o portocală.

- a) Să se dea exemplu de astfel de matrice care are determinantul egal cu 4;
- b) Să se arate că orice astfel de matrice are determinantul din mulțimea $\{-4, 0, 4\}$.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7