CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a X-a

1.
Fie x, y, z numărul jetoanelor pe care sunt scrise numerele 5, 7, respectiv 11.
a) $5x + 7y + 11z \neq 13,\ \forall x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow$ numărul 13 nu este **norocos** 2p
b) $14 = 2 \cdot 7; 15 = 3 \cdot 5; 16 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 11; 17 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7; 18 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 14, 15, 16, 17, 18 sunt numere **norocoase** 2p

c)
$$\left.\begin{array}{l} 14 \text{ - norocos} \Rightarrow 19 \text{ - norocos } (19 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7) \\ 15 \text{ - norocos} \Rightarrow 20 \text{ - norocos } (20 = 4 \cdot 5) \\ 16 \text{ - norocos} \Rightarrow 21 \text{ - norocos } (21 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 11) \\ 17 \text{ - norocos} \Rightarrow 22 \text{ - norocos } (22 = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7) \\ 18 \text{ - norocos} \Rightarrow 23 \text{ - norocos } (23 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 11) \end{array}\right\} \text{……………………2p}$$

Aşadar din n-**norocos**, deducem că şi $(n+5)$ este **norocos** şi apoi,
din aproape în aproape (inductiv), rezultă că orice număr natural $n \geq 14$
este **norocos** ……………………………………………………………...….1p

2. Primul membru al egalității este $\log_A(abc)$...1p

$(ab)^\alpha = A^2 \Rightarrow \alpha \cdot \log_A(ab) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(ab)$ 1p

$(bc)^\beta = A^2 \Rightarrow \beta \cdot \log_A(bc) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(bc)$ 1p

$(ac)^\gamma = A^2 \Rightarrow \gamma \cdot \log_A(ac) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(ac)$ 1p

Adunând aceste egalități membru cu membru, obținem:
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \log_A(abc)$...2p

3. a) $7 - 2\sqrt{x} - x > 0$. Cu $x \geq 0$, notăm $\sqrt{x} = t$ 1p
$t^2 + 2t - 7 < 0$ şi $t \geq 0$ implică $t \in \left[0, 2\sqrt{2} - 1\right)$...1p
Din $t \in \left[0, 2\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow x \in \left[0, 9 - 4\sqrt{2}\right)$...1p

NOTĂ
Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

b) $\left.\begin{array}{l} x \in \left[0, 9-4\sqrt{2}\right) \\ x \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \{0,1,2,3\}$ 2p

$f(0) = \log_{\sqrt{3}-1} 7, f(1) = \log_{\sqrt{3}-1} 4, f(2) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(5-2\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{Z}$ 1p

$f(3) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(4-2\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Punctul $A(3,2) \in G_f$ 1p

4.

a) Prin ridicare la pătrat inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$2+2|\cos x| \le 4 \Leftrightarrow |\cos x| \le 1$ (adevărat)... 3p

b) $2^x + 2^{-x} \le 2$ 1p

Obținem $\left(2^x - 1\right)^2 \le 0 \Rightarrow x = 0$ 3p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.