CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a XI-a

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

$\det(A-3I_2)=ad-bc-3(a+d)+9$ 1p

$\det(A+2I_2)=ad-bc+2(a+d)+4$ 1p

Obținem $\begin{cases} ad-bc-3(a+d)=-5 \\ ad-bc+2(a+d)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+d=2 \\ ad-bc=1 \end{cases}$ 2p

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ 1p

$$\left.\begin{aligned} a^2+bc=a^2+ad-1=a(a+d)-1=2a-1 \\ ab+bd=b(a+d)=2b \\ ac+cd=c(a+d)=2c \\ bc+d^2=ad+d^2-1=d(a+d)-1=2d-1 \end{aligned}\right\}$$ 1p

$A^2=\begin{pmatrix} 2a-1 & 2b \\ 2c & 2d-1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2A-I_2$ 1p

2. Determinantul are n^2 elemente, dintre care (n^2-n+2) egale cu α şi cel mult $(n-2)$ elemente diferite de α 3p

Există două linii(coloane) pe care toate elementele sunt egale cu α 2p

În caz contrar ar exista cel puțin $(n-1)$ linii(coloane) cu măcar un element diferit de α şi deci cel puțin $(n-1)$ elemente diferite de α (fals) 2p

3.

a) $f(0-0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2}=-\dfrac{1}{2}$ 1p

$f(0+0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2}=0$ 1p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

$f(1-0)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2}=\infty$ 1p

$f(1+0)=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2}=-\infty$ 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0\Rightarrow\left[e^{-x}\right]=0$, pentru x suficient de mare $\Rightarrow l_1=0$ 1p

$e^x-1<\left[e^x\right]\le e^x$ 1p

Rezultă: $1-e^x<e^{-x}\left[e^x\right]\le 1$, de unde, trecând la limită şi ținând cont de teorema "cleştelui", obținem $\Rightarrow l_2=1$ 1p

4. Reducere la absurd ....,,..1p

Pentru $|x|$ suficient de mare avem:

$\dfrac{P(x)}{x^2\cdot Q(x)}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ 1p

Obținem: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{x^2\cdot Q(x)}=1$ 1p

Deducem : $\text{grad } P=2+\text{grad } Q$ şi $a_0=b_0$ 1p

Rezultă : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x^2\cdot Q(x)}=1$ 1p

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$, se obține contradicție...1p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.