

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

1. Avem dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$ se numește **norocos** dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egală cu n .

- a) Demonstrați că numărul 13 nu este **norocos**.
- b) Arătați că numerele: 14, 15, 16, 17 și 18 sunt **norocoase**.
- c) Demonstrați că orice număr natural $n \geq 14$ este **norocos**.

2. Fie $a, b, c, A \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât : $(ab)^\alpha = (bc)^\beta = (ac)^\gamma = A^2$.
Demonstrați că :

$$\frac{1}{\log_a A} + \frac{1}{\log_b A} + \frac{1}{\log_c A} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

3. Se dă funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\sqrt{3}-1} (7 - 2\sqrt{x} - x)$.

- a) Arătați că domeniul de definiție este $D = [0, 9 - 4\sqrt{2})$.
- b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f .

4. a) Demonstrați că:

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} \leq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2^x + 2^{-x}.$$

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7