# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului**

## CLASA a XII-a

**1.** Pe mulțimea $G=(-1,\infty)$, se defineşte legea de compoziție internă dată prin $x*y=x+y+xy,\ \forall x,y\in G$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Rezolvați, în G, ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{n\ ori}=1,\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$.

c) Arătați că mulțimea $H=\left\{a^2-1/a\in\mathbb{Q}^*\right\}$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

**2.** a) Folosind substituția $t=\dfrac{1}{u}$, să se demonstreze că $\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2},\ \forall x>0$.

b) Arătați că: $arctg\ x+arctg\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2},\ \forall x>0$.

c) Calculați: $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctg\ x}{x}dx,\ a>1$.

**3.** Calculați: a) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{4x^3-6x^2+8x-3}{\left(x^2-x+1\right)^3}dx$.

b) $I(x)=\displaystyle\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$, unde e este baza logaritmului natural , iar $x\in(0,\infty)$.

**4.** Un elev colorează puncte de coordonate întregi ale planului, raportat la reperul ortogonal $(xOy)$. Fiind colorate două puncte A şi B, elevul poate colora simetricul lui A față de B şi simetricul lui B față de A. Arătați că dacă inițial, în plan, erau colorate punctele $O(0,0)$; $A(1,0)$; $B(1,1)$; şi $C(0,1)$, atunci elevul poate colora toate pnctele de coordonate întregi ale planului.

**Notă:** Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7