CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1.

a) Din inegalitatea mediilor $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ 1p

b) Din punctul a) avem $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ şi analog $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$ ………… 1p

Adunând relațiile obtinem $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$ ...………………………. 1p

Egalitatea are loc dacă a = b = c ………………………………………………… 1p

c) Notează $2^x = a, 3^x = b, 5^x = c$ ………………………………………………..…......... 1p

Obținem $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} = \frac{a+b+c}{2}$ ……………………………………………… 1p

Folosind a) obținem a = b = c, deci $2^x = 3^x = 5^x \Rightarrow x = 0$ ……………………………….. 1p

2.

a) Notăm $\log_2 m = a \Rightarrow f(x) = \sqrt{ax^2 - (1+2a)x + 1 + 2a}$ 1p

Obținem condițiile

$$\begin{cases}\Delta \leq 0 \\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4a^2 \leq 0 \\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$ 2p

Din $a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow \log_2 m \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow m \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$………...……………………… 1p

b) Punem condițiile x, y > 0 şi notează $x\sqrt{y} = a, y\sqrt{x} = b$ 1p

Sistemul devine

$$\begin{cases}a - b = 30 \\ a^2 + b^2 = 2900\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 50 \\ b = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\sqrt{y} = 50 \\ y\sqrt{x} = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 y = 2500 \\ y^2 x = 400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 25 \\ y = 4\end{cases}$$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

3.
a)Etapa verificării 1p
Etapa demonstrației $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ 2p
b) $S = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + ... + 44^2$ 1p
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 44^2) - (3^2 + 6^2 + 9^2 + ... + 42^2)$ 1p
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 44^2) - 3^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 7^2) \Rightarrow S = 28110$ ... 2p

4.
a) Se observă ca diametrele pieselor sunt dimensiunile unui triunghi dreptunghic …… 1p
Prin urmare, greutatea piesei mai mari este echivalentă cu suma greutăților celorlalte două piese 1p
Bijutierul taie fiecare piesă în jumătate, formează câte o jumatate din cercul mic cu o jumătate din cercul mijlociu, iar jumătățile cercului mare formează celelalte două părți 1p
b) Începând cu al doilea pătrat se formează o progresie aritmetică cu rația 8 (plăci) 2p
Pentru cel de-al 11-lea pătrat Remus are nevoie de $(11-1) \cdot 8 = 80$ plăci 1p
Doru a pus $8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + ... + 8 \cdot 19 = 800$ plăci 1p