CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

a) $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$.

b) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2}$. În ce condiții are loc egalitatea?

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{6^x}{2^x+3^x} + \frac{15^x}{3^x+5^x} + \frac{10^x}{2^x+5^x} = \frac{2^x+3^x+5^x}{2}$.

2. a) Se consideră funcția

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 \frac{1}{\log_m 2} - \left(1 + 2\log_2 m\right)x + 1 + 2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{m^2}\right)}$$

Determinați $m > 0, m \ne 1$ astfel încât $D = \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemul $\begin{cases} x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 30 \\ x^2y + xy^2 = 2900 \end{cases}$

.

3. a) Folosind inducția matematică demonstrați egalitatea

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Calculați suma tuturor numerelor naturale pătrate perfecte mai mici decât 2010 şi care nu sunt divizibile cu 3.

4. a) Un bijutier are trei piese din aur de formă circulară şi de diametre diferite. Cele trei diametre sunt: 6 cm, 8 cm şi 10 cm. Grosimea pieselor este aceeaşi la toate cele trei piese. Cum poate împărți în patru părți egale în greutate cele trei piese, fără să le topească sau să le cântărească (doar prin măsurare şi tăiere)? Justificați.

b) Doru şi Remus construiesc un mozaic pătrat din plăci de gresie pătrate identice. Remus pune o placă neagră in centru. Doru pune 8 plăci albe în jurul ei, formând un al doilea pătrat. Remus pune 16 plăci negre în jurul acestora, formând al treilea pătrat. De câte plăci are nevoie Remus pentru a completa cel de-al unsprezecelea pătrat? Câte plăci a pus Doru dacă în total au fost 20 de pătrate?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7