CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a X-a

1. Rezolvați ecuațiile :

a) $\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2$, $x\in\mathbb{R}$

b) $4^x-9^x=10^x-15^x$, $x\in\mathbb{R}$

Soluție:

a) Condiții necesare: $x+3>0$, $x-3>0$ şi $x-3\neq 1$ **1p**

$\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2 \Leftrightarrow \log_3(x+3)\cdot\dfrac{1}{\log_3(x-3)}=2 \Leftrightarrow \log_3(x+3)=\log_3(x-3)^2$ **1p**

$x+3=(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0$ cu $x_1=1$ (respinsă de $x-3>0$), $x_2=6$ soluție unică **1p**

b) $4^x-9^x=10^x-15^x \Leftrightarrow \left(2^x-3^x\right)\left(2^x+3^x-5^x\right)=0$ **1p**

$2^x-3^x=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=1 \Rightarrow$ Soluție $x=0$ **1p**

$2^x+3^x-5^x=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x=1$ **1p**

Soluție unică $x=1$, deoarece $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ strict monotonă **1p**

2. Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe, atunci:

a) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, dacă $\overline{z}=z$ atunci z este număr real($\overline{z}$ este conjugatul complex al numărului complex z);

b) Demonstrați că pentru orice două numere z_1, $z_2\in\mathbb{C}^*$, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ şi $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

c) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, $z+\overline{z}$ şi $z\cdot\overline{z}$ sunt numere reale;

d) Dacă $z=\dfrac{2010+2011i}{2011+2010i}$ arătați că $z\cdot\overline{z}=1$ şi $\overline{z}\left(z^2+1\right)\in\mathbb{R}$

Soluție:

a) $z=a+ib$, $\overline{z}=a-ib$ şi atunci $\overline{z}=z \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z$ este număr real **1p**

b) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)}=\overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=$

$=\overline{a_1+ib_1}+\overline{a_2+ib_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ **1p**

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)}=...=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-ib_1)\cdot(a_2-ib_2)=...=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$ **1p**

analog $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ **1p**

c) $\overline{\left(z+\overline{z}\right)}=\overline{z}+\overline{\overline{z}}=\overline{z}+z=\left(z+\overline{z}\right)$, deci $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ **1p**

analog $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}$ **1p**

d) se verifică $z\cdot\overline{z}=1$ şi atunci $\overline{z}\left(z^2+1\right)=\overline{z}\cdot z^2+\overline{z}=\left(\overline{z}\cdot z\right)\cdot z+\overline{z}=z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ **1p**

3. Într-o populaţie de şoricei 25% sunt albi iar restul sunt negri. Printre cei albi 50% sunt cu ochi albaştri iar dintre cei negri doar 20% au ochi albaştri. Dacă 99 de şoricei au ochi albaştri, aflaţi câţi şoricei sunt în total.

<u>Soluție:</u>

Fie x numărul total de şoricei **1p**

Atunci $25\%(x)=\frac{x}{4}$ sunt albi **1p**

şi $75\%(x)=\frac{3x}{4}$ sunt negri **1p**

dintre şoriceii albi $50\%\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{8}$ au ochi albaştri **1p**

dintre şoriceii negri $20\%\left(\frac{3x}{4}\right)=\frac{3x}{20}$ au ochi albaştri **1p**

$\frac{x}{8}+\frac{3x}{20}=99$ **1p**

$x=360$ **1p**

4. Un experiment de biochimie cercetează comportamentul unui mediu la o variaţie tipică de temperatură, pe durate de 10 secunde. Pe parcursul unei desfăşurări a experimentului un termostat reglează temperatura mediului cercetat în funcţie de factorul *moment*, astfel ca la fiecare moment $t\in[0;10]$ temperatura mediului cercetat să fie $T(t)=\left[\sqrt{t^2-6t+81}\right]$ grade, în care $[m]$ înseamnă partea întreagă a numărului m .(Spre exemplu $\left[\sqrt{76}\right]=8$ deoarece $\sqrt{76}\in[8;9)$).

a) Aflaţi temperatura mediului la momentul de început şi la momentul final al experimentului;

b) Aflaţi dacă pe parcursul experimentului se mai înregistrează măcar încă o dată temperatura de la momentul de început şi în caz afirmativ determinaţi un astfel de moment;

c) Demonstraţi că termostatul nu permite scăderea temperaturii mediului sub valoarea de 8 grade;

d) Determinaţi temperatura maximă pe care o atinge mediul pe parcursul experienţei;

e) Demonstraţi că temperatura maximă este atinsă doar la un singur moment al experimentului.

<u>Soluție</u>

a) $T(0)=\left[\sqrt{81}\right]=9$ grade şi $T(10)=\left[\sqrt{121}\right]=11$ grade la final **1p**

b) $T(t)=\left[\sqrt{t(t-6)+81}\right]$; $T(0)=T(6)$, deci aceeaşi temperatură este la $t=6$ **1p**

c) $T(t)=\left[\sqrt{(t-3)^2+72}\right]\geq\left[\sqrt{72}\right]=8$ **1p**

d) $(t-3)^2$ are valoare maximă în $t=10$ **1p**

deci $T(10)=\left[\sqrt{121}\right]=11$ grade este temperatura maximă atinsă **1p**

e) Când $t\in[0;10)$ se obţine $(t-3)^2<49$ **1p**

şi atunci $T(t)=\left[\sqrt{(t-3)^2+72}\right]<\left[\sqrt{121}\right]=11$, deci $T(t)\leq 10$ **1p**