CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

BAREME DE CORECTARE CLASA a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ şi $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})/\ A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Calculați A^2 şi A^3;

b) Arătați că matricele din $C(A)$ sunt de forma $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$;

b) Arătați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(\mathbb{C})$;

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

<u>Soluție:</u>

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$ **1p**

b) $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\2a+d&2b+e&2c+f\end{pmatrix}$ **1p**

c) $X\cdot A=\begin{pmatrix}b+2c&c&0\\e+2f&f&0\\h+2i&i&0\end{pmatrix}$ şi prin identificare X este de forma $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$ **1p**

$X=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}$ sunt soluții........ **2p**

d) $X^4=A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}\Rightarrow X^3=A\Rightarrow a^3=0$ şi $3a^2b=1$ (Fals) **2p**

2. Determinați numerele reale a şi b încât $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\frac{3}{16}$

<u>Soluție</u> :

$f(x)=\sqrt{x^2+x+a}-b$, $g(x)=x^2+2x-3\Rightarrow f(1)=\sqrt{a+2}-b$ **1p**

$g(1)=0$ **1p**

pentru ca limita să fie finită în mod necesar $\sqrt{a+2}-b=0$ **1p**

$\Rightarrow a=b^2-2$ **1p**

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+b^2-2}-b}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(x^2+2x-3)\left(\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b\right)}$ **1p**

dar $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ şi $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ .... **1p** limita devine $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b\right)}=\dfrac{3}{16}\Rightarrow b=2$, $a=2$ **1p**

3. Fie matricele de forma $A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det A$;

b) Arătați că există matrice A de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală egale cu 2011 sau -2011;

c) Arătați că există matrice A de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală numere întregi nenule şi distincte două câte două.

d) La următorul joc se folosesc tablouri matriceale de forma din figură şi doi participanți completează pe rând cele şase căsuțe libere, scriind într-o căsuță liberă, câte un număr întreg nenul. $\begin{pmatrix}0 & \square & \square\\ \square & 0 & \square\\ \square & \square & 0\end{pmatrix}$

Câştigă cel care începe jocul dacă determinantul matricei obținută este diferit de zero, respectiv câştigă celălalt participant dacă determinantul este egal cu zero. Descoperiți o strategie prin care al doilea jucător să câştige jocul indiferent de cum joacă primul jucător.

<u>Soluție</u>:

a) $\det A=a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ **1p**

b) Spre exemplu $A=\begin{pmatrix}0 & 2011 & -2011\\ 2011 & 0 & 2011\\ 2011 & 2011 & 0\end{pmatrix}$ are $\det A=0$ **1p**

c) $a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}=0\Rightarrow a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}=-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ **1p**

spre exemplu, pot alege $a_{12}=1$, $a_{23}=2$, $a_{31}=3$, $a_{21}=-1$, $a_{32}=-2$, $a_{13}=-3$ **1p**

şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ are $\det A=0$ **1p**

d) O strategie care face să câştige al doilea jucător este ca matricea A să aibă $a_{ij}=-a_{ji}$ **1p**

Aşadar este suficient ca al doilea jucător să aleagă de fiecare dată, simetricul față de diagonala principală a numărului opus celui ales de primul jucător... **1p**

4. O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele $A(2;2)$, $B(9;1)$, $C(14;6)$ şi $D(1;5)$ iar unitatea de lungime în reper de $1\ cm$. Se cere:

a) Determinați coordonatele mijlocului M al diagonalei BD;

b) Demonstrați că M este chiar intersecția diagonalelor patrulaterului(A, M, C-coliniare);

c) Determinați aria patrulaterului;

d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, aflați aria acestui paralelogram;

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

__Soluție__:
Reprezintă în reperul cartezian punctele A, B, C, D **1p**
a) Găseşte $M(5;\ 3)$ **1p**
b) Verifică coliniaritatea punctelor A, M, C.. **1p**
c) Calculează aria unui triunghi format de trei dintre vârfurile patrulaterului
($A_{ABC}=20\ cm^2; A_{ADC}=20\ cm^2; A_{ADB}=10\ cm^2; A_{CDB}=30\ cm^2$) **1p**
Calculează aria triunghiului rămas şi determină $A_p=40\ cm^2$ **1p**
d) Determină al patrule vârf $P(8;4)$ **1p**
Apoi calculează aria acestui paralelogram ($20\ cm^2$) **1p**