CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că legea este asociativă şi că $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) Demonstrați că mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ față de legea „$\circ$” şi că $(G; \circ)$ este grup comutativ;

d) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Demonstrați că:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \le \dfrac{1}{1+x} \le 1 - x + x^2$, oricare ar fi $x \in [0; 1]$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ şi, folosind eventual a), deduceți că: $\dfrac{7}{12} \le \ln 2 \le \dfrac{5}{6}$;

c) $\dfrac{455}{528} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le \frac{61}{66}$.

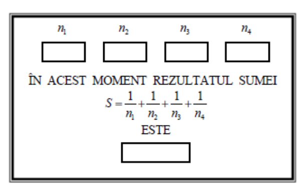
3. Fie funcțiile f, g şi h definite prin: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$; $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in (-\infty; 1) \\ g(x), \text{ dacă } x \in [1; +\infty) \end{cases}$

a) Justificați că funcțiile f, g, h sunt primitivabile şi calculați $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$, $\int h(x)\,dx$;

b) Justificați că funcția h este integrabilă pe $[0; e]$ şi calculați $\displaystyle\int_0^e h(x)\,dx$.

4. Un program de calculator funcționează astfel:

La deschidere afişează pe ecranul monitorului 5 căsuțe ca în figura alăturată şi solicită utilizatorului să scrie în fiecare din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4 câte un număr real nenul;



După scrierea celor patru numere reale n_1, n_2, n_3, n_4 în cea de a cincea căsuță programul afişează instantaneu rezultatul sumei $S = \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \dfrac{1}{n_4}$. În continuare programul lucrează astfel:

La fiecare click succesiv din mouse în oricare două din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4, în care să zicem că apar două numere a şi b, aceste numere sunt înlocuite automat cu numerele $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ şi $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$, cu afişare în a cincea căsuță a noului rezultat al sumei S;

Se cere să se demonstreze că:

a) Dacă $a \cdot b \neq 0$ atunci $a+b+\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$;

b) Dacă $a \cdot b \neq 0$ atunci $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

c) Dacă utilizatorul alege la pornire 4 numere şi pe monitor apare $S=2011$ atunci în orice moment al acelei aplicări a programului suma S afişată pe monitor rămâne permanent 2011;

Dacă utilizatorul alege la pornire numerele 8044, 8045, 8046 şi 8047, atunci în orice moment al acelei aplicări a programului nici unul din cele patru numere afişate nu va deveni 2011.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*