CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. Se dă suma $S_n = 1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + ... + n!\cdot n, n \in \mathbf{N}^*$.

a) Demonstrați că $n!\cdot n = (n+1)! - n!, \forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

b) Calculați S_n.

Soluție

a) Demonstrație 3p

b) $S_n = (2!-1!) + (3!-2!) + \ldots + [(n+1)!-n!]$ 2p

$S_n = (n+1)! - 1$ 2p

2. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit acelaşi număr de pagini şi a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini şi apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

Soluție

Fie n – numărul de pagini citite în fiecare zi 2p

$31\cdot n = \frac{n}{4} + \left(\frac{n}{4}+1\right) + \left(\frac{n}{4}+2\right) + ... + \left(\frac{n}{4}+30\right)$ 3p

$n = 20$ 1p

Cartea are $31\cdot 20 = 620$ pagini 1p

3. Se dau mulțimile:

$A = \{(a,a,a) / a \in \mathbf{Z}\}$;

$B = \{(a,b,c) / a + 2b - 3c = 0, a,b,c \in \mathbf{Z}\}$;

$C = \{(a,b,c) / a + 3b - 4c = 0, a,b,c \in \mathbf{Z}\}$.

Demonstrați că $A = B \cap C$.

Obs. *Două mulțimi X şi Y sunt egale dacă şi numai dacă* $X \subseteq Y$ *şi* $Y \subseteq X$.

Soluție

1°) $\underline{A \subseteq B \cap C}$

$\forall (a,a,a) \in A \Rightarrow (a,a,a) \in B$ şi $(a,a,a) \in C$, adică $A \subseteq B$ şi $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ 3p

2°) $\underline{B \cap C \subseteq A}$

Fie $(a,b,c) \in B \cap C \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a + 3b - 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b \Rightarrow (a,b,c) = (a,a,a) \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow B \cap C \subseteq A$ 3p

Din 1°) şi 2°) $\Rightarrow A = B \cap C$ 1p

4. Demonstrați că expresia dată mai jos nu depinde de x:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n} - \frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x,\ n\in \mathrm{N}^*\setminus\{1\},\ x>0,\ \mathrm{x}\neq 1.$$

<u>Soluție</u>

Notăm $log_x 2 = t$ 1p

$$E=\frac{1}{t^2\cdot 1\cdot 2}+\frac{1}{t^2\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{t^2\cdot(n-1)\cdot n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{t^2}$$ 2p

$$E=\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\frac{n-1}{nt^2}$$ 2p

$$E=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{n-1}{n}-\frac{n-1}{nt^2}$$ 1p

$E = 0$ 1p