CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1. Prețul unui obiect s-a ieftinit cu 75% şi apoi noul preț s-a scumpit de două ori consecutiv cu acelaşi procent $p\%$, după care obiectul a ajuns la acelaşi preț ca la început. Aflați cu ce procent a avut majorarea de preț.

<u>Soluție:</u>

Notăm cu x prețul inițial

După ieftinire obiectul costă: $x-\frac{75}{100}x=\frac{1}{4}x$ 1p

Prima scumpire: $\frac{1}{4}x+\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{4}x=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{x}{4}$ 2p

A doua scumpire: $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{x}{4}+\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{x}{4}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\frac{x}{4}=x$ 2p

Deci $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=4\Rightarrow p=100\%$ 2p

2. La olimpiada de matematică elevii unei şcoli au obținut următoarele rezultate grupate în tabelul de mai jos:

Punctaj (x_i)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Frecvența (n_i)	16	26	35	47	24	13

a) Să se completeze tabelul cu frecvențele absolute cumulate crescător;
b) Să se calculeze valoarea medie a seriei statistice;
c) Să se calculeze mediana şi să se compare cu valoarea medie.

<u>Soluție:</u>

a)

Punctaj (x_i)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Frecvența (n_i)	16	26	35	47	24	13
Frecvența absolută cumulată crescător (N_i)	16	42	77	124	148	161

.... 2p

b)

x_i	45	55	65	75	85	95
n_i	16	26	35	47	24	13

$\bar{x}=\frac{45\cdot16+55\cdot26+65\cdot35+75\cdot47+85\cdot24+95\cdot13}{16+26+35+47+24+13}=$ 1p

$=\frac{720+1430+2275+3525+2040+1235}{161}=\frac{11225}{161}\cong69{,}7$ 1p

c) clasa mediană = prima clasă din seria frecvențelor cumulate crescător căreia îi corespunde cel puțin jumătate din numărul indivizilor, deci în cazul nostru clasa mediană este [70,80)

Mediana este dată de formula: $M_e = L + \frac{C_M - N_{i-1}}{n_i} \cdot k$, unde

L = limita inferioară a clasei mediane;

C_M = cota medianei, adică $C_M = \begin{cases} \frac{N}{2}, \text{dacă } N = par \\ \frac{N+1}{2} \text{ dacă } N = impar \end{cases}$, unde N este populația statistică

N_{i-1} = frecvența absolută cumulată crescător până la clasa mediană;
n_i = frecvența absolută corespunzătoare clasei mediane;
$k = (x_{i+1} - x_i)$ amplitudinea clasei mediane.

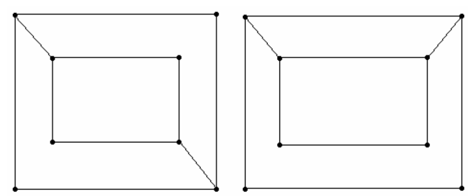
Deci $L = 70, C_M = \frac{161+1}{2} = 81, N_{i-1} = 77, n_i = 47, k = 80 - 70 = 10$ 1p

$M_e = 70 + \frac{81-77}{47} \cdot 10 = 70 + \frac{4}{47} \cong 70 + 0,085 = 70,085$ 1p

$M_e > \overline{x}$ 1p

3.

a) Să se studieze dacă grafurile din imagine sunt izomorfe.
b) Fie G un graf cu n vârfuri ($n \geq 3$) şi m muchii astfel încât $m > C_{n-1}^2$. Să se arate că G nu are vârfuri izolate.



Soluție:
a) *Doua grafuri sunt izomorfe daca au acelaşi număr de noduri, acelaşi număr de muchii si daca exista o numerotare a nodurilor din fiecare dintre cele doua grafuri astfel încât:*

1. Daca doua noduri din primul graf sunt unite printr-o muchie atunci nodurile corespunzătoare din al doilea graf sunt unite printr-o muchie;

2. Nodurile corespunzătoare au ordine egale (ordinul unui nod reprezintă numărul de muchii cu care este conectat la graf) 1p

Se constată că au câte 8 noduri , câte 10 muchii si fiecare graf are 4 noduri de ordin 3 si 4 noduri de ordin 2 .... 1p

Daca constatarea se face fără a da definiția de mai sus se acorda si punctul corespunzător baremului

Grafurile nu sunt izomorfe deoarece nodul din stânga sus din primul graf este legat doar cu un singur nod de ordin 3, în timp ce în al doilea graf este legat cu două noduri de ordin 3 .... 2p

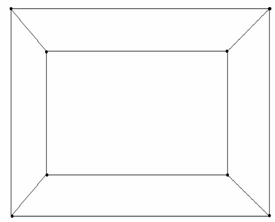
b) Presupunem prin reducere la absurd că graful are un vârf izolat 1p

Atunci numărul maxim de muchii pentru cele *n-1* vârfuri rămase este C_{n-1}^2 .... 1p

Contradicție cu ipoteza $m > C_{n-1}^2$ 1p

4.
a) Desenați un graf regulat de ordin 3 cu 8 noduri;
b) Demonstrați că numărul de noduri ale unui graf regulat de ordin 3 este par.

Soluție:
a) Un graf se numeşte regulat de ordin k dacă fiecare nod are ordinul k.

De exemplu  3p

b) Într-un graf regulat avem:
- *suma ordinelor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii* 1p
(Daca elevul nu da aceasta definiție dar o foloseşte corect in rezolvare, se acorda si acest punct).
Presupunem că numărul de noduri este impar şi atunci suma ordinelor nodurilor este impară.
Contradicție deoarece suma este egală cu dublul numărului de muchii 3p