CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^3 = O_3$ și $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.

b) Calculați $2A + 3A^2 + 4A^3 + ... + 2011A^{2010}$

c) Calculați $(I_3 + A)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție

a) $A_3 = O_3$ 1p

$det\left(I_3 + A\right) \cdot det\left(I_3 - A + A^2\right) = det\left[\left(I_3 + A\right)\left(I_3 - A + A^2\right)\right] = det\left(I_3^3 + A^3\right) =$

$= det\left(I_3 + O_3\right) = det\, I_3 = 1$ 2p

b) Din $A^3 = O_3 \Rightarrow A^n = O_3\ (\forall) n \geq 3$ 1p

$2A + 3A^2 + ... + 2011A^{2010} = 2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

c) $\left(I_3 + A\right)^n = C_n^0 I_3^n + C_n^1 I_3^{n-1} A + C_n^2 I_3^{n-2} A^2 + C_n^3 I_3^{n-3} A^3 + ...$ 1p

$\left(I_3 + A\right)^n = I_3 + nA + \dfrac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

3. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ se definește legea $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că $(\mathbf{R}, \circ)$ este grup comutativ.

b) Determinați $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$.

Soluție

a)

Parte stabilă 1p

Asociativitate 1p

Comutativitate 1p

Element neutru $e = 0 \in \mathbb{R}$ 1p

Element simetric $x' = -x \in \mathbb{R}$ 1p

b) $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 2^3} = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ 2x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ 2p

3. Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani suma vârstelor celor doi copii va fi egală cu vârsta tatălui .

<u>**Soluție**</u>
Notam f, F şi T vârstele fiului mai mic, mai mare si a tatălui

$\begin{cases} T + 7 = 6f \\ (F+15)\cdot 2 = T + 15 \\ (F+18) + (F+18) = T + 18 \end{cases}$ 4p

f =7 ani; F =10 ani; T = 35 ani 3p

4. Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Timpul de funcționare a fiecărui robinet şi cantitatea de apă evacuată exprimată în hectolitri sunt în tabelul de mai jos. Să se determine debitul în hl / oră a fiecărui robinet.

Robinetul 1 (nr. ore)	Robinetul 2 (nr. ore)	Robinetul 3 (nr. ore)	Cantitatea de apă evacuată (hl)
2 ore	3 ore	6 ore	220 hl
3 ore	2 ore	6 ore	210 hl
2 ore	2 ore	3 ore	145 hl

<u>**Soluție:**</u>
Notam cu d_1, d_2, d_3 debitele în hl / oră a celor trei robinete.

$\begin{cases} 2d_1 + 3d_2 + 6d_3 = 220 \\ 3d_1 + 2d_2 + 6d_3 = 210 \\ 2d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 145 \end{cases}$ 3p

d_1 = 20 hl/oră; d_2 = 30 hl/oră; d_3 =15 hl/oră 4p