

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Se dă suma $S_n = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Demonstrați că $n! \cdot n = (n+1)! - n!$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

b) Calculați S_n .

2. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

3. Se dau mulțimile:

$$A = \{(a, a, a) / a \in \mathbf{Z}\};$$

$$B = \{(a, b, c) / a + 2b - 3c = 0, a, b, c \in \mathbf{Z}\};$$

$$C = \{(a, b, c) / a + 3b - 4c = 0, a, b, c \in \mathbf{Z}\}.$$

Demonstrați că $A = B \cap C$.

Obs. Două mulțimi X și Y sunt egale dacă și numai dacă $X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X$.

4. Demonstrați că expresia dată mai jos nu depinde de x :

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}, x > 0, x \neq 1.$$

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.