CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Pe tablă sunt scrise trei numere reale, nenule nu neapărat distincte. Când în locul lor s-au scris produsul lor, suma lor şi suma produselor lor luate câte două, s-a constatat că pe tablă au apărut aceleaşi numere ca şi cele iniţiale. Care au fost numerele scrise iniţial pe tablă?

Soluţie:

Dacă $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^*$ sunt numerele iniţiale, atunci $abc, a+b+c, ab+bc+ca$ sunt noile numere 1p

Dacă $abc=a \Rightarrow bc=1$ 2p

1° Dacă $a+b+c=a\Rightarrow b+c=0\Rightarrow b=-c$ şi din $bc=1\Rightarrow -b^2=1$(fals!) 1p

2° Dacă $a+b+c=b\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a,$ din $abc=1\Rightarrow -ab=1$; din $ab+bc+ac=c\Rightarrow a^2=a\Rightarrow$ $a=1$, iar numerele sunt: $1,-1,-1$ 2p

3° Dacă $a+b+c=c\Rightarrow a+b=0\Rightarrow b=-a$, din $ab+bc+ac=b\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-1$ si $c=$-1 numerele sunt: $1,-1,-1$ 1p

(Din motive de simetrie, cazurile $abc=b$ si $abc=c$ dau aceleaşi soluţii)

2. a) Demonstraţi că $(1+a)^n\geq 1+na$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*, a\in(0,\infty)$.

b) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de raţie $r>0$, iar $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică de raţie $q>1$. Dacă $a_1=b_1>0$ şi $a_2=b_2$ arătaţi că $b_n\geq a_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ (folosiţi eventual inegalitatea de la a)).

Soluţie:

a) demonstrează inegalitatea(prin inducţie matematica) 2p

b) Scrie $a_n=a_1+(n-1)r$ şi $b_n=b_1q^{n-1}$ 2p

Fie $a_1=b_1=a>0$ atunci $r=a(q-1)$ 1p

$b_n=aq^{n-1}=a(1+q-1)^{n-1}\geq a\big(1+(q-1)(n-1)\big)=a+r(n-1)=a_n$ 2p

3. Fie ABCD un patrulater convex, P mijlocul segmentului $[AB]$ şi $M\in[BC], N\in[AD]$ astfel încât $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{1}{3}$.

a) Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{PM}$ şi $\overrightarrow{PN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PD}$.

b) Demonstraţi că mijloacele segmentelor $[AB],[MN]$ şi $[CD]$ sunt puncte coliniare.

Soluţie:

3\. a) $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)$ 1p

$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ 1p

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}\right)$ 1p

$\overrightarrow{PN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ 1p

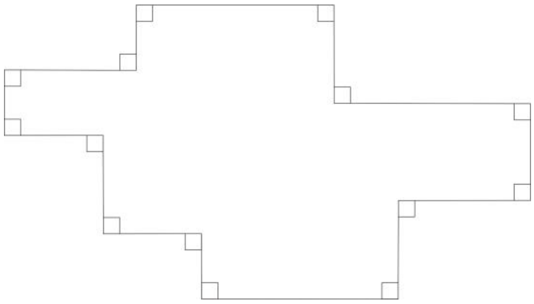
b) Fie F şi G mijloacele segmentelor $[MN]$, respectiv $[CD]$.

$\overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}\right)=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$ 1p

$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$ 1p

Deducem că $\overrightarrow{PG}=3\overrightarrow{PF}\Rightarrow P,F,G$ -coliniare 1p

4. Zidul unei cetăţi reprezintă o linie poligonală închisă(vezi figura de mai jos). Fiecare două semente vecine ale acestei linii poligonale formează un unghi drept. Într-o noapte, un paraşutist a aterizat lângă zidul cetăţii. Acesta nu ştie dacă este în interiorul sau în exteriorul cetăţii. Ocoleşte zidul cetăţii şi numără câte cotituri face la stânga şi câte la dreapta într-un tur complet.



a) Câte cotituri face paraşutistul la dreapta şi câte la stânga, dacă ocoleşte zidul astfel încât acesta să rămână mereu în dreapta sa, în ambele cazuri(ocolire interioaraă sau ocolire exterioară)?

b) Cum deduce paraşutistul dacă a aterizat în interiorul sau exteriorul cetăţii?

Soluţie:

Paraşutistul lasă paraşuta într-un punct lângă zid(punct de pornire), diferit de un colţ al zidului ... 1p

Dacă cetatea se ocoleşte prin exteriorul zidului, se vor face 9 cotituri la dreapta şi 5 cotituri la stânga 2p

Dacă cetatea se ocoleşte prin interiorul zidului, se vor face 5 cotituri la dreapta şi 9 cotituri la stânga 2p

Din diferenţa de 4 cotituri, paraşutistuldeduce dacă a aterizat în interiorul sau în exteriorul cetăţii 2p

(9 ocoliri la dreapta $\Rightarrow$ocolire exterioară)

(5 ocoliri la dreapta $\Rightarrow$ ocolire interoară)