CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Pe $G=(3.\infty)$ definim legea de compoziţie $x\circ y=(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in G$.

a) Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Calculaţi $5\circ 8'$, unde $8'$ este inversul lui 8 în *G*.

c) Demonstraţi că, dacă *H* este subgrup al lui $(G,\circ)$ care conţine toate numerele naturale mai mari sau egale cu 4, atunci H conţine toate numerele raţionale $q>3$.

Soluţie:

a) - operaţia “$\circ$” este comutativă şi asociativă 1p

- elementul neutru este $e=4\in G$ 1p

- oricare $x\in G$ admite $x'=3+\dfrac{1}{x-3}\in G$ 1p

b) $5\circ 8'=5\circ\left(3+\dfrac{1}{5}\right)=2\cdot\dfrac{1}{5}+3=3+\dfrac{2}{5}=\dfrac{17}{5}$ 2p

c) $q=\dfrac{a}{b}>3, a,b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a-3b>0$ şi cum $a,b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a-3b\geq 1$ deci $a-3b+3\geq 4$ şi $b+3\geq 4\Rightarrow$

$\Rightarrow a-3b+3, b+3\in H$. Din $(a-3b+3)\circ(b+3)'\in H\Rightarrow\dfrac{a-3b}{b}+3=\dfrac{a}{b}=q\in H$ 2p

2. Calculaţi $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$.

Soluţie:

$I=\displaystyle\int_1^2\frac{x^2dx}{x^3\left(x^3+1\right)}$ 2p

$x^3=t\Rightarrow I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^8\frac{dt}{t(t+1)}$ 2p

$I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^8\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^8$ 2p

$I=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{16}{9}$ 1p

3. Considerăm $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ o funcţie derivabilă cu $f(1)=1$, pentru care ordonata punctului de intersecţie a axei *Oy* cu tangenta într-un punct oarecare al graficului funcţiei *f* este egală cu jumătate din ordonata punctului de tangenţă.

a) Demonstraţi că $xf'(x)=\dfrac{1}{2}f(x), x\geq 1$.

b) Demonstraţi că $\displaystyle\int_a^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln\sqrt{\frac{x}{a}}$, pentru orice $x\geq 1, a\geq 1$ fiind un număr fixat.

c) Determinaţi funcţia *f*.

Soluţie:

a) Ecuaţia tangentei în $M\left(x_0, y_0\right) \in G_f$ este $y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right), x_0 \geq 1$ şi taie Oy în $A\left(0, f\left(x_0\right) - x_0 f'\left(x_0\right)\right)$ 1p

$\frac{1}{2} f\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) - x_0 f'\left(x_0\right), x_0 \geq 1$ 1p

b) $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_a^x \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln t \Big|_a^x = \ln \sqrt{\frac{x}{a}}$ 2p

c) $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \frac{f(x)}{f(a)}$ 1p

$\ln \frac{f(x)}{f(a)} = \ln \sqrt{\frac{x}{a}} \Rightarrow f(x) = c\sqrt{x}$, c constantă $\left(c = \frac{f(a)}{\sqrt{a}}\right)$ 1p

Din $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1$ şi $f(x) = \sqrt{x}, \ x \geq 1$ 1p

4. Se consideră în plan trei discuri disjuncte D_1, D_2, D_3 de raze r_1, r_2, r_3. Notăm $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ şi S aria lui D. Ştiind că proiecţia lui D pe axele unui reper xOy sunt două segmente având suma lungimilor egală cu 1, se cere:

a) Arătaţi că $S \leq \frac{1}{4}$;

b) $r_1 + r_2 + r_3 \geq \frac{1}{4}$;

c) $S \geq \frac{\pi}{48}$.

Soluţie:

a) Fie $(AB), (A'B')$ proiecţiile mulţimii D pe cele două axe şi $MNPQ$ dreptunghiul determinat de paralele duse prin A, B, A', B' la axe, deci $MN + NP = 1$ 1p

Dreptunghiul $MNPQ$ conţine mulţimea D 1p

$S_D \leq S_{MNPQ} = MN \cdot NP \leq \left(\frac{MN + NP}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 1p

b) Deoarece proiecţia lui D pe fiecare axă este un segment şi proiecţia unui cerc pe o dreaptă este proiecţia diametrului, paralel cu dreapta, pe dreaptă, rezultă $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq AB$ şi $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq A'B'$, sumând rezultă $4r_1 + 4r_2 + 4r_3 \geq 1$ 2p

c) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geq \frac{1}{3}\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2$ 1p

$S_D = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) \geq \frac{\pi}{3}\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2 \geq \frac{\pi}{48}$ 1p