CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XI-a

1. Fie $A=\{(x,y)/|x|+|y|\le 5\}$

a) Într-un reper ortogonal (xOy), rezolvând inecuaţiile corespunzătoare fiecarui cadran, reprezentaţi mulţimea *A*, prin haşurare.
b) Să se demonstreze că oricum am alege 101 puncte din A, există cel puţin două dintre acestea la o distanţă mai mică sau egală cu 1(împărţind pătratul prin paralele la laturi).

2. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}+\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

Studiaţi existenţa limitei $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pentru $a=-\infty$, $a=0$, $a=1$ şi $a=\infty$.

3. Fie $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demonstraţi că $A^2+A-2I_3=O_3$

b) Demonstraţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

c) Rezolvaţi în $M_3(\mathbb{R})$, ecuaţia $AX=A^2-I_3$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(x-y)-xf(y)\le 1-x$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

a) Demonstraţi că $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $1-\dfrac{1-f(0)}{x}\le f(x)\le 1$, pentru orice $x>0$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Determinaţi toate funcţiile *f* care verifică condiţia dată.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*