

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a XII-a

1. Pe $G = (3, \infty)$ definim legea de compoziție $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in G$.
- Să se demonstreze că (G, \circ) este grup abelian.
 - Calculați $5 \circ 8'$, unde $8'$ este inversul lui 8 în G .
 - Demonstrați că, dacă H este subgrup al lui (G, \circ) care conține toate numerele naturale mai mari sau egale cu 4, atunci H conține toate numerele raționale $q > 3$.
2. Calculați $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$.
3. Considerăm $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ o funcție derivabilă cu $f(1) = 1$, pentru care ordonata punctului de intersecție a axei Oy cu tangenta într-un punct oarecare al graficului funcției f este egală cu jumătate din ordonata punctului de tangență.
- Demonstrați că $xf'(x) = \frac{1}{2}f(x), x \geq 1$.
 - Demonstrați că $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \sqrt{\frac{x}{a}}$, pentru orice $x \geq 1, a \geq 1$ fiind un număr fixat.
 - Determinați funcția f .
4. Se consideră în plan trei discuri disjuncte D_1, D_2, D_3 de raze r_1, r_2, r_3 . Notăm $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ și S aria lui D . Știind că proiecția lui D pe axele unui reper xOy sunt două segmente având suma lungimilor egală cu 1, se cere:
- Arătați că $S \leq \frac{1}{4}$;
 - $r_1 + r_2 + r_3 \geq \frac{1}{4}$;
 - $S \geq \frac{\pi}{48}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.