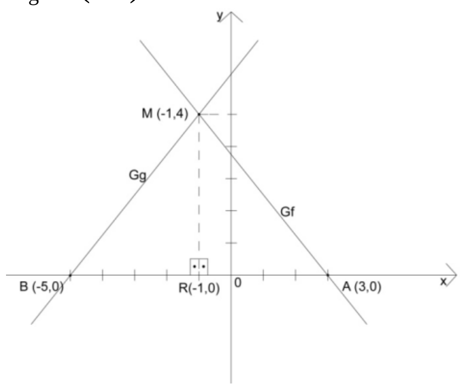
CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcţiile f, g: R → R, f(x) = ax + 3 şi g(x) = x + b.
a. Să se determine a şi b $\in$ R astfel încât M (-1,4) să fie punct comun graficelor G_f şi G_g.
b. Să se demonstreze că pentru a şi b determinaţi mai sus $G_f \perp G_g$.
c. Să se determine aria suprafeţei cuprinse între graficele funcţiilor f, g şi axa Ox.

<u>Soluţie:</u>
a) $M \in G_f \Rightarrow f(-1) = 4 \Rightarrow -a + 3 = 4 \Rightarrow a = -1$
$M \in G_g \Rightarrow g(-1) = 4 \Rightarrow -1 + b = 4 \Rightarrow b = 5$ 1p

b) $G_f \cap (Ox) \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3,0)$
$G_g \cap (Ox) \Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow B(-5,0)$ 1p



Desen corect cu indicarea tuturor elementelor pe figură 2p
ΔARM:
$m(\sphericalangle R) = 90^\circ$, AR = 4 u.m., MR = 4 u.m. $\Rightarrow m(\sphericalangle RMA) = 45^\circ$
ΔMRB:
$m(\sphericalangle R) = 90^\circ$, MR = 4 u.m., RB = 4 u.m. $\Rightarrow m(\sphericalangle RMB) = 45^\circ$
.... 1p
$\Rightarrow m(\sphericalangle AMB) = 90^\circ \Rightarrow G_f \perp G_g$ 1p

c) $\mathcal{A}_{\triangle AMB} = \dfrac{AB \cdot MR}{2} = \dfrac{4 \cdot 8}{2} = 16$ u.p. 1p

2. Un grădinar a plantat într-una dintre grădinile pe care le îngrijeşte parcele cu tufe de trandafir din soiuri distincte, astfel încât fiecare parcelă conţine trandafiri dintr-un alt soi. Într-o zi are de realizat un aranjament floral din aceşti trandafiri. Analizează tufele şi procedează în felul următor: din prima parcelă taie trei trandafiri, din cea de a doua taie de două ori mai mulţi decât din prima ş.a.m.d., tăind dintr-o parcelă de două ori mai mulţi trandafiri decât din parcela precedentă.
a. Câte soiuri de trandafiri trebuie să folosească grădinarul pentru a realiza aranjamentul floral, astfel încât acesta să fie format din 6141 de trandafiri?
b. Care este numărul minim de trandafiri pe care trebuie să-l aibă parcela a IX-a pentru a putea fi folosită la realizarea aranjamentului floral?

<u>Soluţie:</u>
a) Fie (n + 1), numărul de parcele cu tufe de trandafiri ale grădinii, pentru realizarea aranjamentului floral 1p
Conform enunţului trebuie să avem:
$3 + 2\cdot 3 + 2\cdot(2\cdot 3) + 2\cdot(2\cdot 2\cdot 3) + \ldots + \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{n\ \text{ori}}\cdot 3 = 6141$ 1p

Deducem: $3(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 6141$ 1p
$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2047 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 2047$ 1p
$2^{n+1} = 2048 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{11} \Rightarrow n = 10$ 1p
Aşadar, grădinarul trebuie să folosească 11 soiuri de trandafiri pentru realizarea aranjamentului floral 1p
b) Parcela a IX a trebuie să aibă cel puţin: $3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768$ 1p

3. Din mulţimea {-2; -1; 0; 1; 2} se aleg la întâmplare două elemente a şi b, nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuaţia $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?

<u>Soluţie:</u>

Pentru ca $x^2 + 2ax + b = 0$ să aibă rădăcini reale este necesar ca $\Delta \geq 0$ 1p
$\Delta = (2a)^2 - 4b = 4a^2 - 4b;\ \Rightarrow 4a^2 - 4b \geq 0 \Rightarrow a^2 - b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b$ 1p
Sunt $5 \cdot 5 = 25$ cazuri posibile 2p
Cazuri favorabile: $b = -2 \Rightarrow$ 5 cazuri, $b = -1 \Rightarrow$ 5 cazuri, $b = 0 \Rightarrow$ 5 cazuri, $b = 1 \Rightarrow$ 4 cazuri
$b = 2 \Rightarrow$ 2 cazuri. Sunt 21 de cazuri favorabile 2p
Probabilitatea cerută este $P = \frac{21}{25}$ 1p

4. Fie ABCD un patrulater convex şi punctele $M \in [AD]$, $N \in [BC]$ care împart segmentele [AD] şi [BC] în acelaşi raport m. Să se determine vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$.

<u>Soluţie:</u>

$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = m \Rightarrow \overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{MD}$ şi $\overrightarrow{BN} = m \cdot \overrightarrow{NC}$ 1p
(1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ 1p
(2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ 1p
Înmulţim relaţia (1) cu m:
$m \cdot \overrightarrow{MN} = m \cdot \overrightarrow{MD} + m \cdot \overrightarrow{DC} + m \cdot \overrightarrow{CN}$ 1p
şi o adunăm cu relaţia (2), obţinem:
$(m+1) \cdot \overrightarrow{MN} = m \cdot \overrightarrow{MD} + m \cdot \overrightarrow{DC} + m \cdot \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ 1p
$(m+1) \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + m \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{DC}$ 1p
de unde $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{DC}}{1+m}$ 1p