

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"  
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012  
Filiera teoretică, profil umanist**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A**

1. Se consideră mulțimea  $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ .

a) Să se demonstreze că  $\mathbb{Z} \subset A$ .

b) Să se demonstreze că  $\sqrt{2} - 1 \in A$  și  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin A$ .

c) Să se demonstreze că  $\sqrt{101} - 10 \in A \cap \left(0, \frac{1}{20}\right)$ .

**Soluție:**

a)  $(\forall) k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = k + \sqrt{0} \in A \Rightarrow \mathbb{Z} \subset A$  ..... 1p

b)  $-1 \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 + \sqrt{2} \in A$  ..... 1p

Presupunem  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A \Rightarrow (\exists) k \in \mathbb{Z}$  și  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = k + \sqrt{n} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = k^2 + n + 2k\sqrt{n}$  ..... 1p

$\Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=6 \\ k^2+n=5 \end{cases}$  - fals ..... 2p

c)  $x = \sqrt{101} - 10 = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}$  ..... 1p

Evident  $x > 0$  și  $x < \frac{1}{10+10} = \frac{1}{20}$ , ..... 1p

2. a) Să se demonstreze că:  $\log_2 5 \in (2; 3)$ ;

b) Să se rezolve ecuația  $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$

**Soluție:**

a) Avem:  $2 = \log_2 4$  și  $3 = \log_2 8$  ..... 1p

Cum  $4 < 5 < 8 \Rightarrow \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 \Rightarrow \log_2 5 \in (2, 3)$  ..... 2p

b) Condiția de existență:  $x > 0$  ..... 1p

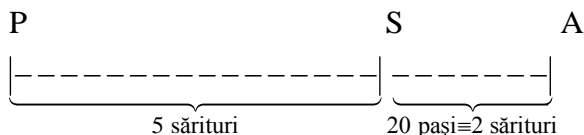
Ecuația este echivalentă cu  $5^{\lg x} \cdot (1 + 5^{-1}) = 3^{\lg x} \cdot (3 + 3^{-1})$  ..... 1p

$\frac{6}{5} \cdot 5^{\lg x} = \frac{10}{3} \cdot 3^{\lg x}$  ..... 1p

$3 \cdot 5^{\lg x-1} = 5 \cdot 3^{\lg x-1} \Rightarrow 5^{\lg x-2} = 3^{\lg x-2} \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100$  ..... 1p

3. Un șoricel se află la 20 pași de adăpostul său. Pisica se află la 5 sărituri în spatele șoricelului și începe urmărirea simultan cu fuga șoricelului spre adăpost. Când pisica face o săritură, șoricelul face 3 pași. O săritură a pisicii este echivalentă cu 10 pași ai șoricelului. Poate pisica să prindă șoricelul până la intrarea în adăpost ?

**Soluție:**



5 sărituri                      20 pași = 2 sărituri



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera teoretică, profil umanist**

Pentru pisică sunt necesare 7 sărituri pentru a ajunge la adăpostul șoricelului ..... 2p  
După 6 sărituri ale pisicii, șoricelul face  $6 \cdot 3 = 18$  pași ..... 2p  
Așadar șoricelului îi mai rămân 2 pași pentru a ajunge la adăpost și cu al treilea pas se va ascunde, prin urmare pisica nu poate prinde șoricelul. .... 3p

4. Un alfabet al extraterestrilor conține doar două litere: A și B. Acest alfabet are următoarea proprietate: Dacă se șterge subcuvântul AB dintr-un cuvânt, sau se introduce într-o oarecare poziție a cuvântului ales subcuvântul BA sau subcuvântul AABB, atunci se obține un cuvânt sinonim cu cel ales. (se acceptă și cuvinte formate dintr-o singură literă)
- a) Aplicând oricare dintre cele trei operații unui cuvânt ales, diferența dintre numărul de litere A și numărul de litere B se modifică ?
- b) Cuvintele ABA și BABA sunt sinonime ?

**Soluție:**

- a) Alegând un cuvânt oarecare din limba în care se folosește acest alfabet, dacă ștergem subcuvântul AB (1A și 1B) sau adăugăm într-o oarecare poziție a cuvântului ales subcuvântul BA (1A și 1B) sau subcuvântul AABB (2 de A și 2 de B), diferența dintre numărul de litere A și numărul de litere B din cuvânt nu se modifică ..... 4p
- b) În cuvântul ABA, această diferență este 1, iar în cuvântul BABA, diferența este zero. Așadar cuvintele ABA și BABA nu sunt sinonime ..... 3p