CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

Soluţie:

Numărul băieţilor este 22 – 10 = 12 .... 1p

Fetele pot fi alese în $C_{12}^3 = 220$ moduri 2p

Băieţii pot fi aleşi în $C_{10}^2 = 45$ moduri 2p

Comitetul format din 3 fete şi 2 băieţi dintre cei 22 de elevi ai clasei poate fi format în $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = 9900$ moduri 2p

2. Se consideră matricele: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$B = I_3 + A$ şi $C = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

a. Să se calculeze $S = A – XY$

b. Să se determine $a \in R$ astfel încât $BC = I_3$

c. Să se demonstreze că $A^4 = 14^3 \cdot A$ şi apoi faptul că $A^{n+1} = 14^n \cdot A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Soluţie:

a) $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A$ 1p

$S = A – A = O_2$ 1p

b) $B \cdot C = (I_3 + A)(I_3 + a \cdot A) = I_3 + a \cdot A + A + a \cdot A^2 = I_3 + (a+1)A + a \cdot A^2$ 1p

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 3\cdot 14 & 2\cdot 14 \\ 3\cdot 14 & 9\cdot 14 & 6\cdot 14 \\ 2\cdot 14 & 6\cdot 14 & 4\cdot 14 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = 14\cdot A$$

$B \cdot C = I_3 + (a + 1) \cdot A + 14 \cdot a \cdot A = I_3 + (15a + 1) \cdot A$ 1p

$B \cdot C = I_3 \Rightarrow (15a + 1) \cdot A = O_2 \Rightarrow 15a + 1 = 0 \Rightarrow 15a = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{15}$ 1p

c) $A^2 = 14\cdot A$, $A^3 = 14\cdot A^2 = 14\cdot 14\cdot A = 14^2\cdot A$, $A^4 = A^3\cdot A = 14^2\cdot A\cdot A = 14^2\cdot A^2 = 14^3\cdot A$ 1p

Presupunem că $A^n = 14^{n-1} \cdot A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi demonstrăm că $A^{n+1} = 14^n \cdot A$, (sau variante)

$A^{n+1} = A^n \cdot A = 14^{n-1} \cdot A^2 = 14^{n-1} \cdot 14 \cdot A = 14^n \cdot A$ 1p

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEŢEANĂ - 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

3. Doi elevi E_1 şi E_2 joacă următorul joc:
Înlocuiesc, succesiv elementele unei matrice pătratice de ordinul al doilea cu numere întregi, punând pe fiecare linie câte un număr.
Jocul este început de elevul E_1.
Câştigă jocul elevul care în urma completării tuturor elementelor matricei, face ca modulul determinantului matricei să fie un număr par.
Să se demonstreze că elevul E_2 poate aplica acea strategie care îl duce la câştig, indiferent de numerele completate de elevul E_1.

Soluţie:

Dacă matricea este $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_4 - a_2a_3$ 1p

1. Dacă E_1 pune a_1 = impar ($a_1 = 2k + 1$, $k\in\mathbb{Z}$), E_2 va pune a_2 = par,($a_2 = 2m$, $m\in\mathbb{Z}$) 1p

Indiferent ce va pune E_1 în locul lui a_3 (par sau impar) E_2 va pune a_4 = par ($a_4 = 2l$, $l\in\mathbb{Z}$) 1p

În acest caz avem $\det A = \begin{vmatrix} 2k+1 & 2m \\ a_3 & 2l \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2k+1 & m \\ a_3 & l \end{vmatrix}$ = par, deci E_2 câştigă 2p

2. Dacă E_1 pune a_1 = par ($a_1 = 2k$, $k\in\mathbb{Z}$), E_2 va pune a_2 = par ($a_2 = 2m$, $m\in\mathbb{Z}$) 1p

În acest caz avem $\det A = \begin{vmatrix} 2k & 2m \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} k & m \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ = par, deci E_2 câştigă 1p

4. Într-un plan, raportat la reperul ortogonal de axe de coordonate (xOy) se dau punctele: A(0;6); B(a;4); C(-1;4).
a. Să se determine $a\in R$ astfel încât punctele A, B şi C să fie coliniare.
b. Pentru a = 5 să se determine aria triunghiului ABC.
c. Pentru a = 5 să se scrie ecuaţia medianei corespunzătoare laturii BC.

Soluţie:

a) Punctele A, B, C sunt coliniare dacă:

$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 + 4a + 4 - 6a = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ 2p

b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-6+20+4-30\right| = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$ u.p. 2p

c) Determină coordonatele mijlocului lui [BC] notat cu M:

$x_M = \frac{5-1}{2} = 2, y_M = \frac{4+4}{2} = 4 \Leftrightarrow M(2,4)$ 1p

Ecuaţia dreptei (AM): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ AM: $x + y - 6 = 0$ 2p