INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. O mulţime nevidă $A \subset \mathbb{N}^*$ se va numi "**perfectă**" dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului ei de elemente.

a) Verificaţi că mulţimea $M = \{1;3;5;7;9\}$ este perfectă.

b) Determinaţi toate mulţimile perfecte cu trei elemente.

c) Demonstraţi că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puţin o mulţime perfectă cu n elemente.

<u>Soluţie:</u>

a) $1+3+5+7+9=5^2$ 2p

b) $a+b+c=9 \Rightarrow M$ este una din mulţimile $\{1;2;6\}$, $\{1;3;5\}$, $\{2;3;4\}$ 3p

c) Spre exemplu $M = \{1;\ 3;\ 5;\ ...;\ 2n-1\}$ 2p

2. Un număr de 51 insecte minuscule sunt aşezate în interiorul unei plăci pătrate de latură 1.

a) Demonstraţi că o placă pătrată de latură $\frac{1}{5}$ poate fi acoperită cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

b) Demonstraţi că există cel puţin 3 insecte ce pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{7}$.

<u>Soluţie:</u>

a) Un pătrat de latură $\frac{1}{5}$ are diagonala $\frac{\sqrt{2}}{5}$ 2p

$\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$ 2p

b) Un pătrat de latură 1 conţine 25 pătrate de latură $\frac{1}{5}$ 2p

$51:25=2$, rest 1 şi finalizare 1p

3. Considerăm un triunghi ABC şi punctele M, N, P pe laturile (AB), (BC), respectiv (CA) astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP.

a) Demonstraţi că $AB \cdot \overrightarrow{AM} = AM \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Demonstraţi că $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$.

c) Dacă, în plus, $AB \cdot \overrightarrow{AT} + BC \cdot \overrightarrow{BT} + CA \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție:

a) $M \in (AB) \Rightarrow AB \cdot \overrightarrow{AM}$ şi $AM \cdot \overrightarrow{AB}$ au aceaşi direcție 1p

acelaşi sens 1p

aceeaşi măsură $AM \cdot AB$ 1p

b) Justifică $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$ 2p

c)

$$AB \cdot \overrightarrow{AT} + BC \cdot \overrightarrow{BT} + CA \cdot \overrightarrow{CT} = AB \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MT}\right) + BC \cdot \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NT}\right) + CA \cdot \left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PT}\right) =$$

$$= \left(AM \cdot \overrightarrow{AB} + BN \cdot \overrightarrow{BC} + CP \cdot \overrightarrow{CA}\right) + AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} =$$

$$= AM \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)}_{\vec{0}} + AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} = \vec{0}$$ 1p

Din $AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \overrightarrow{PT} = \vec{0} \Rightarrow AB \cdot \overrightarrow{MT} + BC \cdot \overrightarrow{NT} + CA \cdot \left(-\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{NT}\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB - CA) \cdot \overrightarrow{MT} + (BC - CA) \cdot \overrightarrow{NT} = \vec{0}$.

Cum $\overrightarrow{MT}$ şi $\overrightarrow{NT}$ sunt necoliniari $\Rightarrow AB = BC = CA$ 1p

4. Considerăm că fiecare punct din plan este colorat cu exact una din culorile *roşu*, *verde*, *galben* sau *albastru* şi cel puțin patru puncte sunt de culori diferite.

a) Demonstrați că există cel puțin trei puncte necoliniare şi colorate diferit.

b) Demonstrați că există cel puțin trei puncte distincte coliniare şi colorate diferit.

Soluție:

a) Dacă pe o dreaptă sunt toate punctele de aceeaşi culoare, alegem exterior două puncte de alte două culori şi găsim 3 puncte necoliniare colorate distinct 1p

Dacă pe o dreaptă sunt doar două culori alegem în exterior un punct de altă culoare 1p

Dacă pe o dreaptă sunt doar trei culori alegem în exterior un punct de a patra culoare 1p

Dacă pe o dreaptă sunt patru culori alegem în exterior un punct de o culoare oarecare 1p

b) Dacă pe o dreaptă avem doar două culori va exista un patrulater cu varfurile de culori distincte 2p

şi considerăm intersecția diagonalelor lui împreună cu două vârfuri opuse 1p