



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Fie funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$
- Demonstrați că $f(2) + f(-2)$ este număr real.
 - Demonstrați că $|f(z)| = 1$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$.
 - Dacă $z_0 = 1+i$ și pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ avem $z_n = f(z_{n-1})$, aflați z_{2013} .

Soluție:

- $f(2) + f(-2) = \frac{6}{5} \in \mathbb{R}$ 2p
- $z = a + bi \Rightarrow |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$ 3p
- $z_0 = 1+i$, $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = 1+i = z_0$ 1p
 $z_{2013} = z_0 = 1+i$ 1p

2. Doi angajați au inițial același salariu. Datorită crizei, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care firma angajatoare revine și îi aplică mărire salarială tot cu 25%. Din motive asemănătoare și celui de al doilea angajat i se aplică inițial o reducere salarială de 25% iar apoi o majorare de 10% urmată de o nouă majorare de 15%. Care dintre cei doi salariați va avea la final un salariu mai mare?

Soluție:

Dacă salariul inițial a fost x lei atunci:

- primul angajat are modificările salariale (1) $x \rightarrow \frac{3}{4}x$ și (2) $\frac{3}{4}x \rightarrow \frac{15}{16}x$ 3p
- al doilea angajat are modificările salariale (1) $x \rightarrow \frac{3}{4}x$, (2) $\frac{3}{4}x \rightarrow \frac{33}{40}x$, (2) $\frac{33}{40}x \rightarrow \frac{759}{800}x$... 3p

Cum $\frac{759}{800} > \frac{15}{16}$, al doilea angajat va avea salariu mai mare1p

3. Fie $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(0) = 1$ și $f(x+y) = f(\lg(xy))$, (\forall) $x > 0$ și $y > 0$. Demonstrați că:

- pentru orice $t \geq 2$ există $x > 0$ astfel încât $t = x + \frac{1}{x}$;
- $f(t) = 1$, pentru orice $t \geq 2$;
- $f(10^t + 1) = f(t)$, pentru orice $t \geq 0$;
- Determinați funcția f .

Soluție:

- a) $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} > 0$ 2p
- b) $t \geq 2 \Rightarrow f(t) = f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f\left(\lg\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\right) = 1$ 2p
- c) $x = 10^t, y = 1 \Rightarrow f(10^t + 1) = f(t), t \geq 0$ 2p
- d) $10^t + 1 \geq 2 \Rightarrow f(t) = f(10^t + 1) = 1$ 1p

4. Un zid în formă de dreptunghi cu înălțimea de 2 metri se acoperă cu plăci dreptunghiulare având fiecare lungimea de 2 metri și lățimea de 1 metru. Notăm cu a_n numărul de moduri în care putem așeza plăcile când zidul are lungimea de n metri, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Demonstrați că $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ și $a_4 = 5$.
- b) Demonstrați că $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$.
- c) Aflați în câte moduri putem placa zidul dacă acesta are lungimea de 10 metri.

Soluție:

- a) $n = 1 \Rightarrow$ arată $a_1 = 1$ 0,5p
- $n = 2 \Rightarrow$ arată $a_2 = 2$ 0,5p
- $n = 3 \Rightarrow$ arată $a_3 = 3$ 1p
- $n = 4 \Rightarrow$ arată $a_4 = 5$ 2p
- b) Arată $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$ 2p
- c) Determină $a_{10} = 89$ 1p