



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Fie funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$
 - a) Demonstrați că $f(2) + f(-2)$ este număr real.
 - b) Demonstrați că $|f(z)| = 1$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$.
 - c) Dacă $z_0 = 1+i$ și pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ avem $z_n = f(z_{n-1})$, aflați z_{2013} .
2. Doi angajați au inițial același salariu. Datorită crizei, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care firma angajatoare revine și îi aplică mărire salarială tot cu 25%. Din motive asemănătoare și celui de al doilea angajat i se aplică inițial o reducere salarială de 25% iar apoi o majorare de 10% urmată de o nouă majorare de 15%. Care dintre cei doi salariați va avea la final un salariu mai mare?
3. Fie $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(0) = 1$ și $f(x+y) = f(\lg(xy))$, ($\forall x > 0$ și $y > 0$). Demonstrați că:
 - a) pentru orice $t \geq 2$ există $x > 0$ astfel încât $t = x + \frac{1}{x}$;
 - b) $f(t) = 1$, pentru orice $t \geq 2$;
 - c) $f(10^t + 1) = f(t)$, pentru orice $t \geq 0$;
 - d) Determinați funcția f .
4. Un zid în formă de dreptunghi cu înălțimea de 2 metri se acoperă cu plăci dreptunghiulare având fiecare lungimea de 2 metri și lățimea de 1 metru. Notăm cu a_n numărul de moduri în care putem așeza plăcile când zidul are lungimea de n metri, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Demonstrați că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ și $a_4 = 5$.
 - b) Demonstrați că $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$.
 - c) Aflați în câte moduri putem plasa zidul dacă acesta are lungimea de 10 metri.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.