INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a}{\sqrt{2}-1}\cdot x+\frac{b}{\sqrt{2}+1},\ a,b\in\mathbb{Z}.$

a) Determinaţi a şi b $\in\mathbb{Z}$, astfel încât punctul $M\left(\sqrt{2}+1,5\right)$ să se afle pe graficul funcţiei f.

b) Cu a şi b determinaţi mai sus găsiţi punctele de pe grafic cu ambele coordonate numere raţionale.

Soluţie:

Condiţia $M\left(\sqrt{2}+1,5\right)\in G_f$ dacă şi numai dacă $f\left(\sqrt{2}+1\right)=5$ 1p

Obţine relaţia $\sqrt{2}(2a+b)+3a-b=0$, a şi b $\in\mathbb{Z}$ 2p

Deduce sistemul $\begin{cases}2a+b=0\\3a-b=5\end{cases}$ 1p

Rezolvă sistemul şi obţine a = 1, b = -2 .... 1p

$N(\alpha,\beta)\in G_f,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2=0\\\alpha-\beta+2=0\end{cases}$ 1p

Determină punctul N (2, 4) 1p

2. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze f(1) · f(2) · …… · f(2013).

b) Demonstraţi că $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$.

c) Stabiliţi monotonia funcţiei f.

Soluţie:

a) Calculează f(1), f(2), …… , f(2013) 1p
Găseşte f(1) · f(2) · …… · f(2013) = 2014 .... 1p

b) Obţine $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{y-x}{xy(x-y)}$ 2p

Deci $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\frac{1}{xy}<0$, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$ 1p

c) Din $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$ oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$, $x\neq y$, rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ 2p

3. a) Pe un lac creşte o plantă care îşi dublează numărul de frunze zilnic. După 10 zile planta are 2048 de frunze. Să se determine numărul de frunze pe care l-a avut planta în a 5-a zi.
b) Într-un amfiteatru sunt 30 de rânduri de scaune, astfel încât pe fiecare rând sunt cu două locuri mai mult decât pe rândul din faţa sa. Ştiind că pe al doilea rând sunt 18 scaune, să se determine numărul total de scaune din întreg amfiteatrul.

Soluţie:
a) Pe „mers invers" stabileşte câte frunze avea planta în prima zi.

$2048 \to 1024 \to 512 \to 256 \to 128 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4$ 1p

Aşadar, numărul frunzelor plantei este în fiecare zi un termen al unei progresii geometrice cu primul termen $b_1 = 4$ şi raţia $q = 2$ 1p

În a 5-a zi, planta avea $b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$ frunze 1p

b) În primul rând sunt 16 scaune 1p

Numărul de scaune de pe fiecare rând, începând cu primul, este o progresie aritmetică cu $a_1 = 16$ şi $r = 2$ 1p

Cum $a_{30} = 16 + 29 \cdot 2 = 74$, rezultă $S_{30} = \dfrac{(16+74)\cdot 30}{2}$ 1p

Numărul total de scaune din tot amfiteatrul este 1350 .... 1p

4. Fie triunghiul ABC cu $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$.
Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Soluţie:
Figura 1p

Obţine $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ 1p

Din $\overrightarrow{MC} = -3\cdot\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ 1p

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 1p

$2\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 1p

Deduce $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ 1p