INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 4m + 5$ şi A punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa (Oy). Determinați valoarea minimă a lungimii segmentului [OA].

Soluție:

$G_f \cap (Oy) \Rightarrow x = 0$ şi $y = f(0) = m^2 - 4m + 5$ 1p
Punctul de intersecție este $A(0, m^2 - 4m + 5)$ 1p
Lungimea segmentului [OA] este $|OA| = |m^2 - 4m + 5|$ 1p
Dar $m^2 - 4m + 5$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ $(\Delta < 0)$ 1p
$|OA| = |m^2 - 4m + 5|$, iar $\min(m^2 - 4m + 5) = -\dfrac{\Delta}{4a} = 1$ 2p
Aşadar, valoarea minimă a lungimii segmentului [OA] este 1 .... 1p
Observație:
Ultimele 4 puncte se acordă şi dacă scrie $|OA| = |m^2 - 4m + 5| = (m - 2)^2 + 1 > 0$, minimul expresiei atingându-se pentru $m = 2$. Valoarea minimă este 1.

2. Fie funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Demonstrați că $f\left(\dfrac{4+9}{2}\right) > \dfrac{f(4)+f(9)}{2}$.

b) Demonstrați că $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, $a \neq b$.

Soluție:

a) $f\left(\dfrac{4+9}{2}\right) > \dfrac{f(4)+f(9)}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{13}{2}} > \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 13 > \dfrac{25}{2}$ (adevărat) 2p

b) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} > \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$, $a, b \in [0, +\infty), a \neq b$ 2p

Inegalitatea este echivalentă cu: $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$ 1p

$2(a+b) > a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} > 0$ 1p

Obține $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0$ (adevărat) 1p

3. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\log_3(x+1)\right]^2-4\log_3(x+1)+3=0$

Soluție:

a) Condiții de existență $\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ 1p

Obține $x\in[2,+\infty)$ 1p

Unica soluție a ecuației este x = 2 .... 1p

b) Condiție de existență: x + 1 > 0 $\Rightarrow$ $x\in(-1,+\infty)$ 1p

Notează $\log_3(x+1)=t\in\mathbb{R}$ 1p

Obține ecuația $t^2-4t+3=0 \Rightarrow t_1=1,\ t_2=3$ 1p

$\log_3(x+1)=1\Rightarrow x_1=2;\ \log_3(x+1)=3\Rightarrow x_2=26$ 1p

4. Într-o casierie sunt cel mult 35 de bancnote de 5 lei, cel mult 4 bancnote de 100 lei şi cel mult 3 bancnote de 200 lei. Reuşeşte casierița, folosind toate tipurile de bancnote, să plătească:

a) 1000 lei ?

b) 842 lei ?

Soluție:

a) Fie m, n, p $\in\mathbb{N}^*$, numărul bancnotelor de 200 lei, 100 lei şi respectiv 5 lei, astfel încât:

200 m + 100 n + 5 p = 1000 .... 1p

Rezultă: 40 m + 20 n + p = 200 $\Rightarrow$ p $\in$ {10, 20, 30} 1p

1.

p = 10 $\Rightarrow$ 4 m + 2 n = 19 (fals)

p = 30 $\Rightarrow$ 4 m + 2 n = 17 (fals) 1p

2.

p = 20 $\Rightarrow$ 2 m + n = 9 $\Rightarrow$ n $\in$ {1, 3}.. 1p

Dacă n = 1 $\Rightarrow$ m = 4 (fals)

Dacă n = 3 $\Rightarrow$ m = 3 (fals) 1p

Răspunsul este afirmativ, întrucât avem: 200 · 3 + 100 · 3 + 5 · 20 = 1000 .... 1p

b) Cu aceleaşi notații ar trebui să avem: 200·m + 100·n + 5·p = 842 $\Rightarrow$5· (40·m + 20·n + p) = 842 (fals). Aşadar, casierița nu poate plăti 842 lei în condițiile date 1p