INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^3$.
b) Calculaţi $AB-BA+C$.
c) Determinaţi matricea X astfel încât $AX+XB=I_2$.

Soluţie:

a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^4=I_2$ 1p

$B^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=I_2$ 1p

b) $AB-BA+C=I_2$ 2p

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ 1p

$AX+XB=\begin{pmatrix}c-b & a-b+d\\ -a-d & -b+c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Obţine $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 1p

2. Avem o foaie de hârtie pe care în prima etapă o împărţim în 5 bucăţi. În a doua etapă, una dintre aceste bucăţi este din nou împărţită în alte 5 bucăţi. Apoi, în a treia etapă, una din bucăţile obţinute în etapa a doua, este împărţită în 5 bucăţi. Acest procedeu se repetă de mai multe ori după aceeaşi regulă.

a) Câte bucăţi de hârtie se obţin: în a doua etapă, a treia etapă, a patra etapă?
b) După repetarea acestui procedeu de mai multe ori, Claudiu şi Cristina au numărat pe rând bucăţile obţinute. Claudiu a spus că sunt 2012 bucăţi, iar Cristina a spus că sunt 2013 bucăţi. Cine a numărat corect?

Soluţie:

În a doua etapă se obţin $4+5=9$ bucăţi 1p
În a treia etapă se obţin $8+5=13$ bucăţi 1p
În a patra etapă se obţin $12+5=17$ bucăţi 1p
În fiecare etapă numărul de bucăţi de hârtie creşte cu 4 .... 1p
Cum iniţial am avut o foaie de hârtie, după n etape se vor obţine $(1+4n)$ bucăţi 2p
Cum $2012=4\cdot 503$ şi $2013=1+4\cdot 503\Rightarrow$ Cristina a numărat corect 1p

3. Într-un reper cartezian ortogonal (XOY) se consideră punctele A(2,3), B(2m+1,2) şi C(3,2m+2), m fiind un număr real.

a) Demonstraţi că aria triunghiului ABC este $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[(2m-1)^2+1\right]$.

b) Determinaţi m pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

Soluţie:

a) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$; $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m+2 & 1 \end{vmatrix}$ 2p

$\Delta = 4m^2 - 4m + 2$ 2p

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[(2m-1)^2+1\right]$ 1p

b) $S_{min} = \frac{1}{2}$ pentru $m = \frac{1}{2}$ 2p

4. Fie a, b, c, x, y cinci numere întregi şi matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & c \end{pmatrix}$.

Doi elevi, Teodor şi Octavian, joacă următorul joc:
Teodor dă o valoare lui a, apoi Octavian dă o valoare lui x.
După aceea, Teodor dă o valoare lui b şi apoi Octavian dă o valoare lui y.
În final, Teodor dă o valoare lui c.
Câştigă Teodor numai dacă $|\det M| = 1$.

Precizaţi tripletele (a, b, c) care asigură victoria lui Teodor, oricare ar fi alegerile făcute de Octavian.

Soluţie:

detM = bc + axy 2p

Teodor câştigă dacă şi numai dacă $|bc + axy| = 1$ 1p

Pentru ca Teodor să câştige pentru orice x şi y, rezultă a = 0 .... 2p

Deci $|bc| = 1$ de unde:

(a, b, c) ∈ {(0, -1, -1); (0, -1, 1); (0, 1, -1); (0, 1, 1)} 2p