# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEȚEANĂ
## 8 martie 2014

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A IX-A

1. În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 şi totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.

**Soluție.**

$a+b+c=100$, $|a-b|=4$, $|a-c|=3$ .......... 2p

$b=a-4$ nu e posibil .......... 2p

$b=a+4$ conduce la posibilitățile $(a;b;c)=(31;35;34)$ şi $(a;b;c)=(33;37;30)$ .......... 2p

$(a;b;c)=(33;37;30)$ este exclusă $\Rightarrow$ soluție unică $(a;b;c)=(31;35;34)$ .......... 1p

2. Fie $ABC$ un triunghi şi punctele $D\in(BC)$ încât $BD=2DC$, $E\in(AB)$ încât $AE=EB$, respectiv $F\in(CE)$ încât $CF=FE$. Se cere:

   a) Arătați că $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

   b) Arătați că punctele $A, F, D$ sunt coliniare şi determinați valoarea raportului $\frac{AF}{FD}$.

**Soluție.**

a)

Arată $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .......... 2p

Arată $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .......... 2p

b)

Justifică $A, F, D$ coliniare .......... 2p

Determină $\frac{AF}{FD}=3$ .......... 1p

3. Se consideră mulțimea $P$ a tuturor progresiilor aritmetice neconstante $(a_n)_{n\geq 1}$ care au $a_1=4$ şi toți termenii numere naturale.

a) Arătați că toate progresiile din mulțimea $P$ au rația număr natural nenul;
b) Determinați termenul general al acelei progresii din $P$ în care $a_{20} \cdot a_{14}$ are cea mai mică valoare;
c) Aflați câte progresii din mulțimea $P$ au ca termen numărul 2014.

**<u>Soluție.</u>**

a)

Constată necesar $r \in \mathbb{Z}$ .......................................................................................................... 1p

Constată necesar $r \neq 0$ .......................................................................................................... 1p

Constată necesar $r \in \mathbb{N}^*$ .......................................................................................................... 1p

b)

Rația minim posibilă este $r = 1$ .......................................................................................................... 1p

$a_{20} \cdot a_{14} \geq 23 \cdot 17$ .......................................................................................................... 1p

c)

$a_k = 2014 \Rightarrow (k-1)r = 2010$ .......................................................................................................... 1p

$r / 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow$ 16 progresii au ca termen numărul 2014 ………................................................ 1p

4. O ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ o vom numi ”perfectă” dacă $a, b, c$ sunt numere reale nenule și oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți $a, b, c$, toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.
   a) Arătați că ecuația $x^2 - 2014x + 2013 = 0$ este perfectă;
   b) Arătați că ecuația $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ nu este perfectă;
   c) Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să fie perfectă.

**<u>Soluție.</u>**

a) $x = 1$ soluție comună .......................................................................................................... 3p

b) Justificare .......................................................................................................... 1p

c)

Dacă $x_0$ verifică toate ecuațiile atunci $x_0 = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$ ...................................................... 1p

Dacă $a + b + c = 0$ atunci $x_0 = 1$ verifică toate ecuațiile ................................................................ 1p

$\Rightarrow$ condiția de ecuație ”perfectă” este $a + b + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ................................................ 1p