INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
   a) Demonstraţi că $z^2-z+1=0$ şi $z^3+1=0$;
   b) Arătaţi că $z^{2014}+z$ este număr real;
   c) Arătaţi că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.

<u>Soluţie.</u>
a)
Justifică $z^2-z+1=0$ 2p
Justifică $z^3+1=0$ 1p
b) $z^{2014}+z=0\in\mathbb{R}$ 2p
c) $z^{2014}=-z;\ z^{2015}=-z^2$ 1p
$a=3^2$ 1p

2. Sunt date 2013 greutăţi marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
   a) Din greutăţile de 1g, 2g, ..., 9g formaţi trei grămăjoare de mase egale;
   b) Justificaţi că din oricare 6 greutăţi de mase m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5 se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
   c) Arătaţi că se pot forma cu cele 2013 greutăţi trei grămezi de mase egale;
   d) Dar dacă aveţi 2014 greutăţi marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteţi forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificaţi răspunsul.

<u>Soluţie.</u>
a) Formează un exemplu 1p
b) $m+(m+5)=(m+1)+(m+4)=(m+2)+(m+3)$ 1p
c) Împărţim primele 9 greutăţi în trei grămăjoare de mase egale 1p
Rămân $2004=6\cdot 334$ greutăţi 1p
Cele 2004 de greutăţi = 334 de grupe, fiecare grupă cu 3 grămezi de mase egale 1p
Finalizare 1p
d) Nu este posibil, deoarece $S=1+2+3+...+2014$ nu se divide la 3 .... 1p

3. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2013-x, x\in\mathbb{Q}\\ 2014-x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$
   a) Calculaţi $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)$;

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=2014$;

c) Arătați că $(f \circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$

d) Demonstrați că f este inversabilă şi determinați inversa ei.

Soluție.

a) $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)=\sqrt{2014}$ 2p

b) $x=-1$ 2p

c) Arată $(f \circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ 2p

d) Conform cu c) funcția este bijectivă şi $f^{-1}=f$ 1p

4. 4.1 Arătați că $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b\in\mathbb{R}$.

4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy), pe un grafic de ecuație $y=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x\in(1;+\infty)$.

a) Arătați că $y>1$ şi $(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$;

b) Arătați că $x\cdot y\ge 4$;

c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

Soluție.

4.1 .... 2p

4.2.

a) $y>1$ 1p

$(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$ 1p

b) 2p

c) distanța minimă este $2\sqrt{2}$, obținută cu $x=y=2$ 1p