INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
   a) Arătați că C este inversabilă, după care calculați C^{-1} şi verificați egalitatea $A=C^{-1}\cdot B\cdot C$;
   b) Demonstrați că $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;
   c) Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

<u>Soluție.</u>
a)
C este inversabilă 1p
$C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 1p
$A=C^{-1}\cdot B\cdot C$ 1p
b) Inducție 1p
c)
$A^2=C^{-1}\cdot B^2\cdot C$ 1p
$A^n=C^{-1}\cdot B^n\cdot C$ 1p
Finalizare 1p

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\geq -2$. Determinați a şi b încât $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$.

<u>Soluție.</u>
$b\neq\sqrt{a+2}\Rightarrow$ limită infinită 2p
$b=\sqrt{a+2}\Rightarrow L=\dfrac{3}{8\sqrt{a+2}}$ 3p
$L=\dfrac{3}{16}\Rightarrow a=2$ 1p
$\Rightarrow b=2$ 1p

3. Fie $a>0$, $b\in(0;1)$ şi funcția $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{pentru } x\in[0;b]\\ a\cdot x^4, & \text{pentru } x\in(b;1]\end{cases}$

a) Arătați că f are limită în $x = b$ dacă şi numai dacă $a \cdot b = 1$;

b) Calculați $L_1 = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ şi $L_2 = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

<u>Soluție.</u>

a)

$l_s = b^3,\ l_d = a \cdot b^4$ 1p

$l_s = l_d \Leftrightarrow a \cdot b = 1$ 2p

b)

$L_1 = 3b^2$ 1p

$L_2 = -\infty$ pentru $a \cdot b < 1$ 1p

$L_2 = +\infty$ pentru $a \cdot b > 1$ 1p

$L_2 = 4b^2$ pentru $a \cdot b = 1$ 1p

4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi şi cu elemente numere reale. Arătați că:

a) $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$, oricare ar fi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$;

b) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ sau $\det(A - B) \geq \det A + \det B$;

c) Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne + sau – astfel încât $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil. Dacă da, considerând $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + şi –.

<u>Soluție.</u>

a) Verificare 2p

b) Justificare 2p

c) Justificare răspuns afirmativ 2p

Alegerea semnelor +, – în cazul concret dat 1p