INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014};+;\cdot)$, se cere:

a) Arătaţi că $\widehat{53}$ nu este inversabil;

b) Arătaţi că $\widehat{2011}$ este inversabil şi are inversul $\widehat{671}$;

c) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{2014}$ ecuaţia $\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1}$

<u>Soluţie.</u>

a) $53/2014$, deci $\widehat{53}$ este neinversabil 2p

b)

$(2011;\ 2014)=1 \Rightarrow \widehat{2011}$ este inversabil 1p

Justifică $\widehat{2011}\cdot\widehat{671}=\hat{1}$, deci $\widehat{2011}^{-1}=\widehat{671}$ 2p

c)

$\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1} \Leftrightarrow \widehat{2011}\cdot x=\widehat{2009}$ 1p

$x=\widehat{671}\cdot\widehat{2009}=-\widehat{671}\cdot\hat{5}=-\widehat{1341}=\widehat{673}$ 1p

2. Fie funcţia $f:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\ 0]\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\in(0;\ 3]\end{cases}$

a) Arătaţi că f admite primitive;

b) Arătaţi că $F:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\ 0]\\ 2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+2\ln 2-2, & x\in(0;\ 3]\end{cases}$

este primitiva funcţiei f care se anulează în $x=0$;

c) Calculaţi $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

<u>Soluţie.</u>

a)

Justifică f continuă pe $[-1;\ 3]$ 1p

f continuă $\Rightarrow$ primitivabilă 1p

b)

Justifică F derivabilă pe $[-1;\ 3]\setminus\{0\}$ 1p
Justifică F derivabilă în $x=0$ 1p
Constată $F'=f$ şi $F(0)=0$, concluzie 1p
c)
$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = F_1(x)\Big|_{-1}^{0} + F_2(x)\Big|_{0}^{3}$ 1p
Finalizare 1p

3. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.
a) Arătaţi că legea $\circ$ este comutativă, asociativă şi cu element neutru;
b) Determinaţi mulţimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z};\ \circ)$;
c) Pe tablă sunt scrise numerele $0, 1, 2, ..., 24$. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă şi aleg câte 2 numere de pe tablă, le şterg şi scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea $\circ$, a celor două numerele alese. Aflaţi ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

<u>Soluţie.</u>
a) Justificare 3p
b)
$x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in \mathbb{Z},\ x \neq 5$ 1p
$\Rightarrow$ mulţimea elementelor inversabile este $\{4;\ 6\}$ 1p
c) ultimul număr este $1 \circ 2 \circ 3 \circ ... \circ 24$ 1p
cum 5 este absorbant, ultimul număr este 5 .... 1p

4. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx,\ n \in \mathbb{N}^*$. Se cere:
a) Calculaţi I_1;
b) Arătaţi că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$;
c) Arătaţi că I_n este număr raţional numai în cazul $n=1$.

<u>Soluţie.</u>
a) 2p
b) 2p
c)
$n=1 \Rightarrow I_1 = 1 \in \mathbb{Q}$ 1p
$n \geq 2 \Rightarrow I_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 2p