



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
 - a) Demonstrați că $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 + 1 = 0$;
 - b) Arătați că $z^{2014} + z$ este număr real;
 - c) Arătați că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.
2. Sunt date 2013 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
 - a) Din greutatețile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;
 - b) Justificați că din oricare 6 greutateți de mase $m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$ se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
 - c) Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutateți trei grămezi de mase egale;
 - d) Dar dacă aveți 2014 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.
3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2013-x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2014-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 - a) Calculați $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014})$;
 - b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f(x) = 2014$;
 - c) Arătați că $(f \circ f)(x) = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$
 - d) Demonstrați că f este inversabilă și determinați inversa ei.
4. 4.1 Arătați că $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b \in \mathbb{R}$.
4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy) , pe un grafic de ecuație $y = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x \in (1; +\infty)$.
 - a) Arătați că $y > 1$ și $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$;
 - b) Arătați că $x \cdot y \geq 4$;
 - c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.