



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014}; +; \cdot)$, se cere:

- Arătați că $\widehat{53}$ nu este inversabil;
- Arătați că $\widehat{2011}$ este inversabil și are inversul $\widehat{671}$;
- Rezolvați în \mathbb{Z}_{2014} ecuația $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1}$

2. Fie funcția $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0; 3] \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive;

b) Arătați că $F: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2 - 2, & x \in (0; 3] \end{cases}$

este primitiva funcției f care se anulează în $x=0$;

c) Calculați $\int_{-1}^3 f(x) dx$

3. Pe \mathbb{Z} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

- Arătați că legea \circ este comutativă, asociativă și cu element neutru;
- Determinați mulțimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z}; \circ)$;
- Pe tablă sunt scrise numerele $0, 1, 2, \dots, 24$. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă și aleg câte 2 numere de pe tablă, le șterg și scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea \circ , a celor două numerele alese. Aflați ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

4. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se cere:

- Calculați I_1 ;
- Arătați că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$;
- Arătați că I_n este număr rațional numai în cazul $n=1$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.