CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A+xI_3\right)=0$.

b) Găsiți $n\in\mathbb{N}$ pentru care suma elementelor matricei A^n este egală cu 1025.

c) Printr-un program, la un prim pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 2015.

SOLUȚIE:

a) $\det\left(A+xI_3\right)=\begin{vmatrix}1+x & 0 & 1\\ 0 & 1+x & 0\\ 1 & 0 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)^3-(1+x)\ \Rightarrow\ (1+x)^3-(1+x)=0\ \Rightarrow\ x\in\{-2,\ -1,\ 0\}$

b) Inductiv $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$ și se obține ecuația $4\cdot 2^{n-1}+1=1025$ cu soluția $n=9$.

c) La fiecare pas suma elementelor noii matrice este cu 3 mai mare decât suma elementelor matricei anterioare, obținând astfel $5+3n=2015$, deci $n=670$

BAREM:

a) $\det\left(A+xI_3\right)=\begin{vmatrix}1+x & 0 & 1\\ 0 & 1+x & 0\\ 1 & 0 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)^3-(1+x)$ 1p

$\Rightarrow\ (1+x)^3-(1+x)=0\ \Rightarrow\ x\in\{-2,\ -1,\ 0\}$ 1p

b) Calculează A^2 .... 1p

Demonstrează $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$ 1p

și se obține ecuația $4\cdot 2^{n-1}+1=1025$ cu soluția $n=9$. 1p

c) La fiecare pas suma elementelor noii matrice crește cu 3 .... 1p

obținând astfel $5+3n=2015$, deci $n=670$ 1p

2. Fie funcția $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)$.

c) Arătați că există $x_0\in(1;+\infty)$ astfel încât $f(x_0+2015)=f(x_0)+2015$

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$, deci graficul nu are asimptotă orizontală

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=...=0$, deci $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=...=\ln e^2=2$

c) Considerăm funcția continuă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x+2015)-f(x)-2015=2015+\ln\left(\dfrac{x+2016}{x+2014}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=2015$, există $x_0\in(1;+\infty)$ cu $g(x_0)=0$.

BAREM:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală ……………………………………………… 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$, deci graficul nu are asimptotă orizontală ………………….. 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=...=0$, deci $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ ………… 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ ……………………………………………….. 1p

$=...=\ln e^2=2$ ……………………………………………………………………………… 1p

c) Considerăm funcția continuă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x+2015)-f(x)-2015=2015+\ln\left(\dfrac{x+2016}{x+2014}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ………………………………… 1p

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=2015$, există $x_0\in(1;+\infty)$ cu $g(x_0)=0$. …………………….. 1p

3. Numim mulțime a codurilor de lungime 9 mulțimea M a tuturor matricelor de tip 3×3 care au ca elemente cifrele 1 sau 2, fiecare cifră fiind prezentă cel puțin o dată.
a) Determinați numărul codurilor mulțimii M.
b) Arătați că există coduri $X\in M$ cu $\det X=0$ și coduri $Y\in M$ cu $\det Y\neq 0$.
c) Cercetați dacă există coduri $Z\in M$ inversabile și cu $Z^{-1}\in M$.

SOLUȚIE:

a) Fiecare element al unei matrice din M poate fi ales sau 1 sau 2. Cum matricele formate numai cu 1 sau numai cu 2 nu sunt coduri, înseamnă că avem exact $2^9-2=510$ coduri.

b) De exemplu, $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, $\det X=0$ și $Y=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\det Y=4\neq 0$.

c) Fie un cod $Z=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\det Z\neq 0$ și $Z^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ tot cod.

Cum $Z\cdot Z^{-1}=I_3 \Rightarrow a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1$, fals deoarece $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\geq 3$, deci nu există coduri cu proprietatea cerută.

BAREM:

a) Fiecare element al unei matrice din M poate fi ales sau 1 sau 2. Cum matricele formate numai cu 1 sau numai cu 2 nu sunt coduri, înseamnă că avem exact $2^9-2=510$ coduri... 2p

b) De exemplu, $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, $\det X=0$ 1p

și $Y=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\det Y=4\neq 0$ 2p

c) Fie un cod $Z=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\det Z\neq 0$ și $Z^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ tot cod.

Cum $Z\cdot Z^{-1}=I_3$ 1p

$\Rightarrow a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1$,

fals deoarece $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\geq 3$, deci nu există coduri cu proprietatea cerută.......................... 1p

4. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>1$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=c$, care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică $f(ax)-af(x)=bx^2$.
a) Calculați $f(0)$.
b) Arătați că $f(x)=a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$.
c) Determinați funcția f.

SOLUȚIE:

a) $f(ax)-af(x)=bx^2 \Rightarrow f(0)-af(0)=0 \;\; f(0)=0$

b) $n=1 \Rightarrow f(x)=af\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a}\right),\ (\forall)\, x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(ax)=af(x)+bx^2$.

Presupunând relația adevărată pentru $k\in\mathbb{N}$, obținem

$$f(x)=a\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=a\cdot\left[a^k f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^3(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}\right)\right]+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=$$

$$=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^2(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}+a-1\right)=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^{k+1}}\right)$$

c) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{x}{a^n}}\cdot x=cx,\ x\neq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right]=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ x\neq 0$$

și cum $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$

BAREM:

a) $f(ax)-af(x)=bx^2 \Rightarrow f(0)-af(0)=0 \;\; f(0)=0$ 1p

b) $n=1 \Rightarrow f(x)=af\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a}\right),\ (\forall)\, x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(ax)=af(x)+bx^2$ 1p

Presupunând relația adevărată pentru $k\in\mathbb{N}$, obținem

$$f(x)=a\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=a\cdot\left[a^k f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^3(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}\right)\right]+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=$$

$=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^2(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}+a-1\right)=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^{k+1}}\right)$ 2p

c) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{x}{a^n}}\cdot x=cx,\ x\neq 0$ 1p

și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)=1 \Rightarrow$ 1p

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right]=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ x\neq 0$$

și cum $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$ 1p