



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Dacă două lentile au distanțe focale f_1 , respectiv f_2 și le punem la o distanță $d > 0$ una față de cealaltă, cuplul astfel realizat va funcționa ca o nouă lentilă cu distanța focală f dată de legea $f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$.

a) Notând $f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$, să se arate că "o" este lege de compoziție pe mulțimea $D = [d; +\infty)$.

b) Să se arate că funcția $\varphi: [d; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $\varphi(f) = 1 - \frac{d}{f}$ are proprietatea $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$, pentru orice $f_1, f_2 \in [d; +\infty)$.

c) Să se arate că $(D; \circ)$ este structură asociativă.

d) Să se arate că pentru orice $f \in D$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{d \cdot f^n}{f^n - (f-d)^n}$ și să se determine f în situația în care există $n \in \mathbb{N}^*$ lentile identice și cu distanța focală f , care funcționează ca o lentilă cu distanța focală $2d$.

SOLUȚIE:

a) Pentru orice $f_1, f_2 \geq d \Rightarrow f_1 + f_2 - d \geq d > 0$ și atunci

$$\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} - d = \frac{f_1 \cdot f_2 - df_1 - df_2 + d^2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{(d-f_1)(d-f_2)}{f_1 + f_2 - d} \geq 0 \Rightarrow f_1 \circ f_2 \geq d, \text{ deci "o" este lege de compoziție pe mulțimea } D = [d; +\infty).$$

b) $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \Leftrightarrow 1 - \frac{d}{f_1 \circ f_2} = \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$

c) $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi((f_1 \circ f_2) \circ f_3) = \dots = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3)$ și $\varphi(f_1 \circ (f_2 \circ f_3)) = \dots = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$ și $1 - \frac{d}{f_1 \circ f_2 \circ f_3} = \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \left(1 - \frac{d}{f_3}\right)$

d) Inductiv, $1 - \frac{d}{\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}} = \left(1 - \frac{d}{f}\right)^n \Rightarrow \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{d \cdot f^n}{f^n - (f-d)^n}$ și $\frac{d \cdot f^n}{f^n - (f-d)^n} = 2d$, etc.

BAREM:

a) Arată că "o" este lege de compoziție pe $D = [d; +\infty)$ 2p

b) Arată $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$ 1p

c) Demonstrează asociativitatea 2p

d) Demonstrează $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{d \cdot f^n}{f^n - (f-d)^n}$ 1p

Determină f pentru care $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2d$ 1p

2. Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t = 0$, 100 de bacterii. S-a constatat că, pentru orice $t > 0$, funcția $n: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, definită prin $n(t) = \text{numărul bacteriilor din vas la momentul } t$, verifică relația $n'(t) = 0,25 \cdot n(t)$, unde n' este derivata funcției $n = n(t)$.

- a) Determinați funcția n cu această proprietate.
- b) Arătați că $e^x \geq x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și utilizând eventual acest rezultat, demonstrați că numărul bacteriilor din vas la momentul $t = 77$ depășește 2015.

SOLUȚIE:

- a) $\frac{n'(t)}{n(t)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln n(t) = \frac{1}{4}t + c \Rightarrow n(t) = e^{\frac{1}{4}t+c}$ dar $n(0) = 100 = e^c \Rightarrow n(t) = 100 \cdot e^{\frac{1}{4}t}$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f$ are punct de minim $x = 0$ cu $f(0) = 0$
 și folosind $e^x \geq x + 1 \Rightarrow n(77) = 100 \cdot e^{\frac{77}{4}} > 100 \cdot \left(\frac{77}{4} + 1\right) = 100 \cdot \frac{81}{4} = 81 \cdot 25 \Rightarrow n(77) > 2025 > 2015$.

BAREM:

- a) $\frac{n'(t)}{n(t)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln n(t) = \frac{1}{4}t + c \Rightarrow n(t) = e^{\frac{1}{4}t+c} = e^{\frac{1}{4}t} \cdot e^c = e^{\frac{1}{4}t} \cdot k \dots\dots\dots 2p$
 dar $n(0) = 100 = e^c \Rightarrow n(t) = 100 \cdot e^{\frac{1}{4}t} \dots\dots\dots 1p$
- b) Demonstrează $e^x \geq x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$
 $n(77) = 100 \cdot e^{\frac{77}{4}} \dots\dots\dots 1p$
 $n(77) \geq 100 \cdot \left(\frac{77}{4} + 1\right) = 100 \cdot \frac{81}{4} = 81 \cdot 25 \Rightarrow n(77) \geq 2025 > 2015 \dots\dots\dots 1p$

3. Fie $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(1) = 0$ și $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx = \frac{1}{3}$.

b) Demonstrați că $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{3}$.

c) Determinați funcția f pentru care avem egalitate în relația demonstrată la punctul b).

SOLUȚIE:

a) Cum $\int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx = \frac{1}{3}$

b) Folosind punctul anterior, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - x)^2 dx \geq 0$ care este adevărată.

c) Deoarece f' este continuă și $(f'(x) - x)^2 \geq 0, (\forall) x \in [0; 1]$ rezultă, pentru a avea egalitatea, este necesar ca

$f'(x) = x$, deci $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$.

Impunând condițiile date rezultă $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$.

BAREM:

a) Cum $\int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ 2p

$\Rightarrow \int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx = \frac{1}{3}$ 1p

b) $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq \int_0^1 (2xf'(x) - x^2) dx$ 1p

$\int_0^1 (f'(x) - x)^2 dx \geq 0$ adevărată..... 1p

c) Deduce $f'(x) = x$ 1p

$f(x) = \frac{x^2}{2} + c$, rezultă $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ 1p

4. Pe o tablă sunt scrise mai multe numere, printre care și numerele 2013, 2014, 2015, 2016, 2017. Un elev șterge, la întâmplare, două dintre numerele scrise și dacă numerele șterse sunt a și b , în locul unuia dintre ele scrie numărul $a * b = ab - 2015(a + b) + 2015 \cdot 2016$. Se cere:

- a) Verificați $a * b = (a - 2015)(b - 2015) + 2015$.
- b) Aflați ultimul număr scris pe tablă în situația în care elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur număr.

SOLUȚIE:

- a) $(a - 2015)(b - 2015) + 2015 = ab - 2015a - 2015b + 2015^2 + 2015 = ab - 2015(a + b) + 2015 \cdot 2016 = a * b$
- b) Efectuând operațiile date, cum de fiecare dată pe tablă rămâne cu un număr mai puțin și numerele scrise sunt în număr finit, la un moment dat apare o operație $a * 2015$ dar $a * 2015 = 2015$. Deci 2015 nu poate să dispară de pe tablă, ceea ce înseamnă că ultimul număr rămas pe tablă este 2015.

BAREM:

- a) Verifică $a * b = (a - 2015)(b - 2015) + 2015$ 2p
- b) Observă că numărul numerelor scrise pe tablă scade cu câte o unitate de fiecare dată când se șterg două numere a și b și se scrie rezultatul operației $a * b$ 1p
- Observă $a * 2015 = 2015$ 2p
- și cum numerele scrise pe tablă sunt în număr finit 1p
- ultimul număr rămas pe tablă este 2015. 1p