CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A IX-A

1. Un program de calculator generează un șir de numere naturale $(t_n)_{n\geq 1}$ pe care le afișează succesiv pe ecran. Primul număr afișat este $t_1 = 3$ și la fiecare pas programul generează numărul următor adăgând 1 la dublul ultimului număr afișat pe ecran.

a) Aflați care este al treilea număr afișat pe ecran.

b) Demonstrați că $t_n = 2^{n+1} - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

c) După câți pași apare afișat pe ecran numărul 1023?

d) Arătați că t_{2015} se divide cu 3.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, cu care se formează ecuațiile $x^2 - ax + (b-1) = 0$ și $x^2 - bx + (a-1) = 0$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + 8 \geq 4(a+b)$.

b) Demonstrați că cel puțin una din aceste ecuații are rădăcini reale.

c) Există alegeri $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care exact una din ecuațiile date să aibă rădăcini reale?

3. Se consideră funcția $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $p(t) = |6 - 2t| - |t - 8| + 2$. Aceasta reprezintă profitul anual al unei firme, exprimat în mii de lei, unde t este timpul măsurat în ani cu începere din momentul înființării firmei.

a) Calculați profitul firmei la finalul primului an, adică $p(1)$.

b) Arătați că firma nu înregistrează profit în primii patru ani.

c) Aflați după câți ani firma recuperează investiția inițială de 51 mii lei, determinând cel mai mic $t \in \mathbb{N}$ pentru care $p(1) + p(2) + \ldots + p(t) \geq 51$.

4. Pe o dreaptă d, pe care am fixat un sens dat de vectorul $\vec{u}$ de mărime 1, considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, nu neapărat distincte și într-o ordine arbitrară, dar astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, …, $A_9A_{10} = 10$.

a) Arătați că $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$ sau $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$

b) Verificați egalitatea $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5}$.

c) Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{A_2A_5}$ poate avea lungimea egală cu 2, 4, 6 sau 12.

d) O muscă zboară în linie dreaptă pe traseul $A_0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{10}$. Arătați că indiferent de alegerea poziției pe dreaptă a punctelor $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, la finalul traseului musca nu ajunge în A_0.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*