



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.
- a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A + xI_3) = 0$.
- b) Găsiți $n \in \mathbb{N}$ pentru care suma elementelor matricei A^n este egală cu 1025.
- c) Printr-un program, la un prim pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 2015.
2. Fie funcția $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x+1) - \ln(x-1)$.
- a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.
- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x(f(x) - 2x)$.
- c) Arătați că există $x_0 \in (1; +\infty)$ astfel încât $f(x_0 + 2015) = f(x_0) + 2015$.
3. Numim mulțime a codurilor de lungime 9 mulțimea M a tuturor matricelor de tip 3×3 care au elemente cifrele 1 sau 2, fiecare cifră fiind prezentă cel puțin o dată.
- a) Determinați numărul codurilor mulțimii M .
- b) Arătați că există coduri $X \in M$ cu $\det X = 0$ și coduri $Y \in M$ cu $\det Y \neq 0$.
- c) Cercetați dacă există coduri $Z \in M$ inversabile și cu $Z^{-1} \in M$.
4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 1$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$, care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică $f(ax) - af(x) = bx^2$.
- a) Calculați $f(0)$.
- b) Arătați că $f(x) = a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right) + \frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.
- c) Determinați funcția f .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.