INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În mulțimea numerelor reale, determinați soluțiile ecuațiilor:

a) $\left(\sqrt[2]{2}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+1} = (0,25)^{-1}$

b) $x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = 100$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^2$	2 p.
	$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$	1 p.
b).	Condițiile de existență $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	1 p.
	Logaritmăm ambii membri ai ecuației date şi obținem: $\lg x^{\frac{\lg x+1}{\lg x}} = \lg 10^2$	2 p.
	Rezultă: $\frac{\lg x+1}{\lg x} \cdot \lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10 \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	1 p.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}, f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție a funcției f.

b) Să se cerceteze dacă f este funcție impară.

c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și determinați inversa ei .

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	Condițiile de existență: $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D \equiv (-1,1)$	1 p.
b).	$f(-x) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x) \Rightarrow f$ este funcție impară.	1 p.
c).	O funcție este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă. Injectivitatea. $\left[(\forall)\ x_1, x_2 \in (-1,1)\right.$, din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, soluție unică$\left.\right]$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$	1 p.

	Surjectivitatea: $\left[(\forall)\ y\in\mathbb{R},(\exists)\ x\in(-1,1), \text{ a. î. } y=f(x)\right]$ Fie $(\forall)\ y\in\mathbb{R}\Rightarrow y=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\Rightarrow \lg 10^y=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\Rightarrow x=\frac{1-10^y}{1+10^y}$	2 p.
	Demonstrează că $-1<x<1$	1 p.
	Cum f este bijectivă, rezultă că f este inversabilă şi inversa funcției f este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-1,1),\ f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$.	1 p.

3. Un angrosist cumpără un anumit număr de aparate de fotografiat pentru suma totală de 21600 lei. Dacă el cumpără cu 30 de aparate mai mult, vânzătorul îi acordă o reducere de 20 lei la fiecare aparat și angrosistul va plati astfel 24000 lei. Câte aparate a cumpărat angrosistul și cât costă un aparat dacă acesta acceptă oferta vânzătorului?

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte	
Fie x, numărul de aparate cumpărate şi y prețul unui aparat	1 p.
Din enunț avem: $\begin{cases} x\cdot y=21600 \\ (x+30)\cdot(y-20)=24000 \end{cases}$	1 p.
Obținem: $21600-20x+30y-600=24000\Rightarrow 2x-3y+300=0$	1 p.
Din $2x-3\cdot\frac{21600}{x}+300=0\Rightarrow x^2+150x=32400=0$	2 p.
Rezultă: $x_1=-270$ (nu convine) şi $x_2=120$	1 p.
Aşadar angrosistul cumpără 120 aparate de fotografiat şi fiecare aparat costă 180 lei	1 p.

4. Trei elevi, Matei, Raluca şi Vlad şi-au cumpărat, fiecare, o aceeași carte. Din banii pe care îi aveau fiecare, Matei a cheltuit 100%, Raluca $\frac{5}{9}$, iar Vlad 50%. Apoi ei au împărțit toți banii rămași în mod egal. Astfel, Matei a primit de la Raluca 1 leu. Câți lei a avut fiecare înainte de a cumpăra cartea?

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte	
Fie x lei prețul cărții	1 p.
Din enunț deducem că Matei a avut x lei, Raluca a avut $\frac{9}{5}\cdot x$ lei, iar Vlad a avut $2x$ lei.	2 p.
După ce fiecare şi-a cumpărat cartea, Matei a rămas cu 0 lei, Raluca cu $\left(1-\frac{5}{9}\right)\cdot x=\frac{4}{5}\cdot x$ lei, iar Vlad cu x lei.	1 p.
Le-au mai rămas $\frac{4}{5}\cdot x+x=\frac{9}{5}\cdot x$ lei, deci fiecare a luat câte $\frac{3}{5}\cdot x$ lei	1 p.
Matei a luat de la Raluca $\frac{4}{5}\cdot x-\frac{3}{5}\cdot x=\frac{1}{5}\cdot x=1\Rightarrow x-5$ lei	1 p.
Aşadar Matei a avut 5 lei, Raluca 9 lei, iar Vlad 10 lei.	1 p.