INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricele: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^6=I_2$.

b) Demonstraţi că $C^n\neq I_2$, pentru orice n număr natural nenul.

SOLUŢIE ŞI BAREM – 7 puncte		
a).	$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $A^4=A^2\cdot A^2=I_2$	1 p.
	$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $B^6=B^3\cdot B^3=I_2$	1 p.
b).	$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C^3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^4=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C^5=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C^6=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	1 p.
	Presupunem că: $C^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1 & 2k+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ \begin{pmatrix}1 & -2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	2 p.
	Avem: $C^{n+1}=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1 & 2k+3\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}^*\\ \begin{pmatrix}1 & -2(k+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \textit{dacă } n=2k+2,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$	1 p.
	Aşadar: $C^n\neq I_2, (\forall)\ n\in N$	1 p.
b).	$C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=D-I_2, \textit{ unde } D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	1 p.
	$C=D-I_2;\ D^2=O_2\Rightarrow D^3=D^4=.........=D^n=O_2$	1 p.

	$D \cdot I_2 = I_2 \cdot D \Rightarrow$ *putem aplica formula binomului lui Newton pentru* C^n	1 p.
	$C^n = (D - I_2)^n = (-1)^n \cdot (I_2 - D)^n =$ $= (-1)^n \left[I_2^n - C_n^1 \cdot I_2^{n-1} \cdot D + C_n^2 \cdot I_2^{n-2} \cdot D^2 - C_n^3 \cdot I_2^{n-3} \cdot D^3 + ... \right] =$ $= (-1)^n \cdot [I_2 - n \cdot D]$	1 p.
	Rezultă: $C^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$	1 p.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verificați egalitatea: $A^2 - A - 2I_3 = O_3$.

b) Demonstrați că $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015}(A + I_3)$.

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
a).	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1 p.
	Verifică (prin calcul direct) egalitatea: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3$	1 p.
b).	Din: $A^2 - A - 2 \cdot I_3 = O_3 \Rightarrow A^2 + A = 2 \cdot (A + I_3)$	1 p.
	$A^3 + A^2 = 2 \cdot (A^2 + A) = 2^2 \cdot (A + I_3)$; $A^4 + A^3 = 2^2 \cdot (A^2 + A) = 2^3 \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Presupunem că: $A^{k+1} + A^k = 2^k \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Deducem că: $A^{k+2} + A^{k+1} = 2^k \cdot (A^2 + A) = 2^{k+1} \cdot (A + I_3)$	1 p.
	Conform inducției complete avem: $A^{n+1} + A^n = 2^n \cdot (A + I_3),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ Pentru $n = 2015$, obținem: $A^{2016} + A^{2015} = 2^{2015} \cdot (A + I_3)$	1 p.

3. Fie a, b, c numere întregi impare distincte și fie punctele $A(b,\ c)$; $B(c,\ a)$; $C(a,\ b)$, și determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$.

a) Demonstrați că are loc egalitatea: $\Delta = -\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$.

b) Pot fi punctele *A, B, C* coliniare? Justificați răspunsul!

c) Demonstrați că aria triunghiului *ABC* este un număr natural.

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte		
a).	Calcul direct, prin gruparea termenilor din dezvoltarea determinantului Δ.	1 p.
b).	Punctele A, B, C sunt coliniare dacă: $\Delta=\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}=0$	1 p.
	$\Delta=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ (*fals*!!!)	1 p.
	Aşadar punctele A, B, C nu pot fi coliniare	1 p.
c).	a, b, c sunt numere întregi, impare şi distincte. Deci $(a-b)$; $(b-c)$; $(c-a)$, sunt pare şi pătratele sunt multipli de 4	1 p.
	$\sigma(ABC)=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{1}{4}\cdot\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$	1 p.
	Rezultă că $\sigma(ABC)\in\mathbb{N}^*$	1 p.

4. În matricea de mai jos, pe fiecare linie și pe fiecare coloană trebuie să fie două elemente colorate roșu și două elemente colorate negru. Știind că elementele a_{11}, a_{13} și a_{23} sunt colorate roșu, iar a_{34} este colorat negru, aflați ce culori vor avea elementele a_{32} și a_{42}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

SOLUȚIE ȘI BAREM – 7 puncte	
Configurația inițială este: $\begin{pmatrix} R & a_{12} & R & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & N \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{12}, a_{14}, a_{33}, a_{43}$ sunt colorate în negru	1 p.
Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & a_{44} \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: $a_{24}, a_{44}, a_{31}, a_{32}$ sunt colorate în negru	1 p.

Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ a_{21} & a_{22} & R & R \\ R & R & N & N \\ a_{41} & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$	1 p.
Deducem că: a_{21}, a_{22}, a_{41} sunt colorate în negru	1 p.
Obținem configurația: $\begin{pmatrix} R & N & R & N \\ N & N & R & R \\ R & R & N & N \\ N & a_{42} & N & R \end{pmatrix}$, de unde deducem că a_{32}, a_{42} sunt colorate în roşu	1 p.