INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasați la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
a) Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
b) Arătați că cel puțin un elev primeşte mai mult de 3 cărți.
c) Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.

Soluție:
a) Nu este necesar. Este posibil ca un elev să primească 13 cărți şi ceilalți 4 câte o carte. .... 2 puncte
b) Dacă toți elevii ar primi cel mult trei cărți atunci ar fi un total de cel mult 15 cărți, deci cel puțin un elev primeşte mai mult de trei cărți. .... 2 puncte
c) Considerând $a<b<c<d<e$, $a\ge 1$, $b\ge 2$, $c\ge 3$, $d\ge 4$, $e\ge 5$, numărul de cărți primite de cei cinci elevi, rezultă $a+b+c+d+e\ge 1+2+3+4+5=15$ .... 1 punct
şi cum $a+b+c+d+e=17$, rămân două posibilități
$(a;b;c;d;e)=(1;2;3;4;7)$ .... 1 punct
şi $(a;b;c;d;e)=(1;2;3;5;6)$ .... 1 punct

2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$ cu toți termenii numere naturale.
a) Considerând progresia $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care are $a_1=6$ şi $r=10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
b) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care au $r=10$, au printre termenii lor numărul 2016.
c) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care au $a_1=6$, au printre termenii lor numărul 2016.

Soluție:
a) $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ .... 1 punct
$a_1=6$, $r=10\Rightarrow a_n=10n-4$ .... 1 punct
$a_n=2016\Rightarrow 10n-4=2016 \Rightarrow n=202$, deci $2016=a_{202}$ .... 1 punct
b) $a_1+(n-1)\cdot 10=2016$ .... 1 punct
$a_1=2026-10n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\in\{1;2;3;....;202\}$,
deci sunt 202 progresii cu această proprietate .... 1 punct
c) $a_n=6+(n-1)\cdot r=2016\Rightarrow (n-1)\cdot r=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$
$r/2010$ .... 1 punct
şi cum 2010 are 16 divizori, sunt 16 progresii cu această proprietate .... 1 punct

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocum laturii (BC) și punctele P,Q,R astfel încât $\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=y\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AR}=z\cdot\overrightarrow{AC}$, cu $x,\ y,z\in(0;+\infty)$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

b) $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{y}{2}-x\right)\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$

c) Punctele $P,\ Q,\ R$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

Soluție:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ .... 1 punct

b) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{AQ}=y\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{y}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{y}{2}-x\right)\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$ .... 1 punct

c) $P,\ Q,\ R$ sunt coliniare dacă și numai dacă sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PR}=z\cdot\overrightarrow{AC}-x\cdot\overrightarrow{AB}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\ \frac{y-2x}{-2x}=\frac{y}{2z}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ .... 1 punct

4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB, BC și CD, toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, măsurate în km/h.

a) Dacă $v_1=30$, $v_2=20$ și $v_3=50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v=\frac{v_1+v_2+v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, are loc inegalitatea $t_1\geq t_2$.

<u>Soluție</u>:

a) $t_1=\frac{60km}{v_1}+\frac{60km}{v_2}+\frac{60km}{v_3}$ .... 1 punct

$=\ldots=6h$ și $12\ min$ .... 1 punct

b) $v=\frac{100}{3}km/h\ \Rightarrow\ t_2=\frac{180}{v}=5h$ și $24\,min$. .... 1 punct

c) $t_1=60\cdot\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}\right)$ .... 1 punct

$t_2=540\cdot\left(\frac{1}{v_1+v_2+v_3}\right)$ .... 1 punct

$t_1\geq t_2\ \Leftrightarrow\ \left(v_1+v_2+v_3\right)\cdot\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}\right)\geq 9$ .... 1 punct

Demonstrarea inegalității .... 1 punct