INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1}=4\cdot 5^{x}+1$

b) $x^{2}+2\sqrt{x^{2}-3x-4}=3x+4$

c) $\log_{4}(3x-2)\cdot\log_{x}2=1$

Soluție:

a) $5^{x}=y\Rightarrow 5y^{2}-4y-1=0\Rightarrow y_{1}=1,\ y_{2}=-\frac{1}{5}$ .... 1 punct

$5^{x}=1\Rightarrow x=0$, $5^{x}=-\frac{1}{5}$ nu are soluție. .... 1 punct

b) $x^{2}-3x-4\geq 0$, $x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$ .... 1 punct

$x^{2}-3x-4+2\sqrt{x^{2}-3x-4}=0\Rightarrow x^{2}-3x-4=0\Rightarrow x\in\{-1;4\}$ .... 1 punct

c) $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ .... 1 punct

$\log_{4}(3x-2)=\frac{\log_{2}(3x-2)}{2}$; $\log_{x}2=\frac{1}{\log_{2}x}$ .... 1 punct

și se obține ecuația $x^{2}-3x+2=0$ cu soluții $x_{1}=1$ și $x_{2}=2$ dintre care acceptată de condiția $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ este numai $x=2$ .... 1 punct

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reușește să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depășește 200 primește 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primește tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, $f(n)=\begin{cases}2n+800, & \text{dacă } n\leq 200\\ 3n+600, & \text{dacă } n>200\end{cases}$,

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câștiga într-o lună 1620 lei.

Soluție:

a) Dacă scrie 150 pagini, câștigă $800+150\cdot 2=1100$ lei .... 1 punct

Dacă scrie 250 pagini, câștigă $800+200\cdot 2+50\cdot 3=1350$ lei .... 2 puncte

b) Dacă $n \le 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 2n$ .... 1 punct

Dacă $n > 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 200 \cdot 2 + (n - 200) \cdot 3 = 3n + 600$ .... 1 punct

c) $n \le 200 \Rightarrow 2n + 800 = 1620 \Rightarrow n = 410$, contradicție .... 1 punct

$n > 200 \Rightarrow 3n + 600 = 1620 \Rightarrow n = 340$, ... 1 punct

3. Considerăm numerele complexe $z_a = \dfrac{1 - a \cdot i}{1 + a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5} \cdot i$

c) Arătați că $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016}$ este număr real.

Soluție:

a) $|z_a| = 1$ .... 1 punct

$z_a = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} - \dfrac{2a}{1 + a^2} \cdot i$ .... 2 puncte

b) $z_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} \cdot i \Rightarrow \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} = \dfrac{3}{5}, -\dfrac{2a}{1 + a^2} = -\dfrac{4}{5}$ .... 1 punct

$a = \dfrac{1}{2}$ .... 1 punct

c) $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016} = 1 \in \mathbb{R}$ .... 2 puncte

4. a) Arătați că $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

c) Determinați numerele naturale n, a, b și c, știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

Soluție.

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \ge 0$, adevărat .... 1 punct

b) Inductiv: $n = 3$, $3^6 > 108$, adevărat

Dacă $3^{2k} > 3k + 99$, $k \ge 3$, atunci $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 9 > (3k + 99) \cdot 9 > 3 \cdot (k + 1) + 99$ .... 2 puncte

c) Fie a, b, c în condiția cerută, conform cu a) $\Rightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge (a + b + c)^2 \Rightarrow 3(33 + n) \ge 3^{2n}$ și folosind b) $\Rightarrow n \in \{0; 1; 2\}$ .... 2 puncte

Pentru $n = 0$ și $n = 1$ nu avem soluții .... 1 punct

Pentru $n = 2$, $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 35$, cu soluția $(a; b; c) = (1; 3; 5)$ și orice permutare a acesteia. .... 1 punct