INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ 19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătaţi că $A^n=n\cdot A-(n-1)\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Demonstraţi că nu există $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3\cdot X-X\cdot A^3=B$.

c) Arătaţi că egalitatea $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ este adevărată dacă şi numai dacă $a\cdot c=0$.

Soluţie:

a) Verificare prin inducţie. $n=2$, $A^2=2\cdot A-I_2$ .... 1 punct

Dacă $A^k=k\cdot A-(k-1)\cdot I_2$, atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=\ldots=(k+1)\cdot A-k\cdot I_2$ .... 1 punct

b) Presupunem X cu proprietatea cerută, $\Rightarrow$

$$A^3\cdot X-X\cdot A^3=(3\cdot A-2\cdot I_2)\cdot X-X\cdot(3\cdot A-2\cdot I_2)=3\cdot(A\cdot X-X\cdot A)=B\Leftrightarrow A\cdot X-X\cdot A=\frac{1}{3}\cdot B$$

.... 1 punct

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\cdot z & a\cdot(t-x)\\ 0 & -z\cdot a\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

$\Rightarrow a\cdot z=\frac{1}{3}$ şi $a\cdot z=-\frac{1}{3}$, contradicţie .... 1 punct

c) Cum $(A+B)^2=A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2$, cerinţa este echivalentă cu $A\cdot B=B\cdot A$ .... 1 punct

iar $A\cdot B=B\cdot A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+a\cdot c & b+a\\ c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b+a\\ c & a\cdot c+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\cdot c=0$ .... 1 punct

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3e^x-2x+1$. Se cere:

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=1$

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}$

c) Determinaţi numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ există şi este egală cu 2.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1)=1$ .... 1 punct

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^x-2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-2\right)=1$ .... 2 puncte

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-8x^2-6\right)=-3$ .... 2 puncte

c) Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)\neq 0$, limitelale laterale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ sunt fie $+\infty$, fie $-\infty$, deci în mod necesar

$a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$ .... 1 punct

Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$, atunci $b=-a\cdot(3e-1)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}=-a$, din care

rezultă $a=-2$ și $b=6e-2$ .... 1 punct

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $\det A=(a-b)(c-3)$.

b) Demonstrați că pentru $a=3,\ b=2,\ c=4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.

c) Determinați o matrice $C\in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.

Soluție:

a) $\det A=(a-b)(c-3)$ .... 2 puncte

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=1$, deci $\det A\neq 0$, $\Rightarrow$ A inversabilă .... 1 punct

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ .... 2 puncte

c) Alegând $C=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ .... 2 puncte

4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t)=a\cdot t^b+c-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}$, cu $a,b,c,d>0$, unde numărul $t\geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t\geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t\to\infty$, temperatura corpului se apropie infinitezimal de 10 grade Celsius, adică $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=10$.

a) Arătați că $c=12$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x>0 \\ -1, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2+4t+25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Soluție:

a) $T(0)=7 \iff c-5=7 \iff c=12$ .... 1 punct

b) $b>1 \Rightarrow b-1>0$ și $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left[t\cdot\left(a\cdot t^{b-1}+\frac{c}{t}-\sqrt{1+\frac{d}{t}+\frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty\cdot\infty=\infty$ .... 1 punct

$b<1 \Rightarrow 1-b>0$ și $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left[t\cdot\left(\frac{a}{t^{1-b}}+\frac{c}{t}-\sqrt{1+\frac{d}{t}+\frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty\cdot(-1)=-\infty$ .... 1 punct

c) Dacă $b=1$, din $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=10$, $\lim\limits_{t\to\infty}\left[t\cdot\left(a+\frac{c}{t}-\sqrt{1+\frac{d}{t}+\frac{25}{t^2}}\right)\right]=10 \Rightarrow a=1$ .... 1 punct

și atunci $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(t+12-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t(24-d)+119}{t+12+\sqrt{t^2+d\cdot t+25}} = \frac{24-d}{2}=10$,

deci $d=4$ .... 1 punct

d) $T(t)=9 \iff t+3=\sqrt{t^2+4t+25} \Rightarrow t=8$ .... 1 punct

e) $T(t)<10 \iff t+2<\sqrt{t^2+4t+25} \iff t^2+4t+4<t^2+4t+25$, adevărat .... 1 punct