INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta x :

a) $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}}=\sqrt{5}$; b) $\dfrac{1}{3-\log_2 x}+\dfrac{1}{2+\log_2 x}=1$.

Soluție.

a) $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[2,+\infty)$ .... 1 punct

$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$ .... 1 punct

$x=3$ soluția ecuației .... 1 punct

b) $\begin{cases} x>0 \\ 3-\log_2 x\neq 0 \Rightarrow x\in(0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{4},8\right\} \\ 2+\log_2 x\neq 0 \end{cases}$ .... 1 punct

$\log_2 x=t$, $\dfrac{1}{3-t}+\dfrac{1}{2+t}=1\Rightarrow t^2-t-1=0$ .... 1 punct

$t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \log_2 x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, x_1\in(0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{4},8\right\}$ .... 1 punct

$t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \log_2 x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, x_2\in(0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{4},8\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

a) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right)\geq\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}$.

b) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$, $\forall a,b\in(0,+\infty)$.

Soluție.

a) $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right)\geq\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{5}{2}\geq\dfrac{\ln 6}{2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{25}{4}\geq\ln 6$ .... 2 puncte

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{4}\geq 6$ .... 1 punct

b) $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\dfrac{\ln(a\cdot b)}{2}$ .... 1 punct

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$ .... 1 punct

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ .... 1 punct

$(a-b)^2 \geq 0$, $\forall a,b \in (0,+\infty)$ .... 1 punct

3. a) Să se arate că: $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x+2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$ şi $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x-2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 4$.

Soluție.

$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x-1+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x-1-2\sqrt{x-1}+1 = x-2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

b) $(x-1)+1 \geq 2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$ .... 1 punct

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} = 4$ .... 1 punct

$\left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right| = 4$ .... 1 punct

Pentru $x \geq 2$, $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5$ .... 1 punct

Pentru $x \in [1,2)$: $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1 = 4 \Leftrightarrow 2 = 4$, fals .... 1 punct

4. Fie A, B, C trei oraşe, astfel încât $d(A,B) = d(B,C)$ (s-a notat $d(x,y)$ distanța între oraşul x şi oraşul y). Două maşini plecă din oraşul A spre oraşul C, trecând prin oraşul B. Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v km/h, apoi de la B la C merge de două ori mai repede. A doua maşină merge de A la B cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanța de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h. Cele două maşini parcurg distanța de la A la C în acelaşi timp. Calculați viteza v.

Soluție.

Notăm $d(A,B) = d(B,C) = d$.

Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v în timpul t, iar de la B la C cu viteza $2v$ în timpul $\frac{t}{2}$ .... 1 punct

A doua maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza 48 km/h în timpul t_1, iar de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h în timpul t_2 .... 1 punct

$$\begin{cases} t = \dfrac{d}{v} \\ \dfrac{t}{2} = \dfrac{d}{2v} \end{cases}$$ .... 1 punct

$t_1 + t_2 = \frac{d}{48} + \frac{d}{v+20}$ .... 1 punct

$t_1 + t_2 = \frac{3t}{2} = \frac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$\frac{d}{48} + \frac{d}{v+20} = \frac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$v^2 - 4v - 1440 = 0 \Rightarrow v = 40$ km/h .... 1 punct