INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 şi A^3.

b) Arătați că $A^{2016}=2016A-2015I_2$.

c) Rezolvați ecuația $X^2=A$, unde X este o matrice pătratica de ordinul 2, cu elemente numere reale.

Soluție.

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^n+(n-1)I_2=nA, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^{2016}+2015I_2=2016A$ .... 1 punct

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, X^2=A \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+bc=1\\ b(a+d)=-2\\ c(a+d)=0\\ d^2+bc=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=1\\ b(a+d)=-2\\ c=0\\ d^2=1\end{cases}$ .... 2 puncte

$X\in\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, x număr real.

a) Calculați $\det(A(x))$.

b) Arătați că are loc egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi x şi y numere reale.

c) Calculați $P=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, unde n este număr natural nenul.

Soluție.

a) $\det(A(x)) = 1 - 4x^2 + 4x^2 = 1$, pentru orice x numă real. .... 2 puncte

b) Verifică relația .... 3 puncte

c) $P = A\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) = A\left(\frac{n}{n+1}\right)$, pentru orice n număr natural nenul .... 2 puncte

3. În reperul cartezian (xOy) se consideră punctele $A_n(n-1,\ 2n+1)$, n număr natural.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

b)Arătați că punctele A_0, A_1, A_n sunt coliniare oricare ar fi numărul natural n, $n \geq 2$.

c) Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, astfel încât aria triunghiului OA_1A_n să fie 3.

Soluție.

a) $A_0(-1,1)$, $A_1(0,3)$ .... 1 punct

Ecuația dreptei (A_0A_1) este: $2x - y + 3 = 0$ .... 2 puncte

b) $A_n \in A_0A_1$ deoarece $2(n - 1) - (2n + 1) + 3 = 0$. .... 2 puncte

c) $\frac{1}{2}\cdot\left|-3(n-1)\right| = 3$ .... 1 punct

$n = 3$ .... 1 punct

4. În fiecare nod rezultat din intersecțiile celor 7 linii şi 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară şi fiecare se aşează pe un nod vecin, de pe aceeaşi linie sau coloană cu cel de pe care a zburat.

Să se arate că există un nod pe care nu s-a așezat nicio albină.

Soluție.

Să considerăm nodurile tabloului colorate ca o tablă de şah, în alb şi negru.

Atunci 24 de noduri sunt albe şi 25 de noduri sunt negre (sau invers) .... 3 puncte

Observăm că o albină care pleacă de pe un nod negru ajunge pe unul alb, iar de pe un nod alb ajunge pe unul negru. Cum de pe nodurile albe au plecat 24 de albine, ele nu pot ocupa 25 de noduri negre(sau invers). .... 4 puncte