MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

Problema 1.
Un joc de calculator se desfășoară după regula următoare: la fiecare rundă, jucătorul alege un număr $a \in \mathbb{N}^*$, după care calculatorul alege la întâmplare un număr $x \in \mathbb{R}$ și dacă $\frac{15-3x}{7} \geq a$ sau $x+25 \geq a$, atunci jucătorul câștigă a puncte.

a) Stabiliți dacă, pentru $a=12$ și $x=-24$, jucătorul câștigă 12 puncte.
b) Demonstrați că pentru alegerea $a=12$ jucătorul poate să nu câștige 12 puncte.
c) Demonstrați că se pot alege numere $a \in \mathbb{N}$ încât la orice $x \in \mathbb{R}$ ales de calculator, jucătorul să câștige a puncte și aflați numărul maxim de puncte pe care le poate câștiga la o rundă a jocului.

Problema 2.

a) Arătați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
b) Determinați numerele naturale nenule x și y, care verifică $\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{y}$.
c) Determinați funcția $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, verifică relația

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+\ldots+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$$

Problema 3.
Fie triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

a) Demonstrați că $MN \parallel BC$.
b) Dacă $BM \cap CN=\{Q\}$, demonstrați că A este centrul de greutate al triunghiului QBC și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{O}$.
c) Demonstrați că triunghiurile QBC și MNP au același centru de greutate.

Problema 4.
Fie mulțimea tuturor funcțiilor de gradul al doilea, $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f_m(x)=x^2+2(m-1)x+(1-4m)$, $m \in \mathbb{R}$ și considerăm familia parabolelor asociate acestor funcții.

a) Arătați că există $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1;\,3)$ este pe parabola asociată funcției f_m.
b) Arătați că există un punct situat pe toate parabolele familiei.
c) Considerând reprezentarea tuturor parabolelor familiei pe același sistem ortogonal de coordonate, arătați că există puncte nesituate pe nici una din parabolele familiei și oricare trei astfel de puncte sunt coliniare.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*