MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}^*$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 2^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ încât $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 2018^2$.

b) Demonstrați că rezultatul calculului $b_{n+1} - 3(b_1 + b_2 + ... + b_n)$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $b_n \geq 1 + a_n$.

SOLUȚIE:

a) $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2$ 2p

$n^2 = 2018^2 \Rightarrow n = 2018$ 1p

b) $b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \dfrac{4^n - 1}{3}$ 1p

$b_{n+1} - 3(b_1 + b_2 + ... + b_n) = 2^{2n+1} - 2 \cdot (4^n - 1) = 2$ 1p

c) Pentru $n = 1$, $b_1 \geq 1 + a_1 \Leftrightarrow 2 \geq 2$ și pentru ca inducția matematică să confirme inegalitatea $b_n \geq 1 + a_n$ pentru orice $n \geq 1$ avem de demonstrat implicația $b_k \geq 1 + a_k \Rightarrow b_{k+1} \geq 1 + a_{k+1}$ 1p

dar $b_{k+1} = 4b_k \geq 4 \cdot (1 + a_k) = 8k \geq 2k + 2 = 1 + a_{k+1}$ 1p

Problema 2.

Spunem că perechea de numere naturale nenule $(m;n)$ este *interesantă* dacă $0,(3) < \dfrac{m}{n} < 0,34$.

a) Stabiliți dacă perechea $(330;1000)$ este interesantă.

b) Determinați valorile posibile ale lui n astfel încât perechea $(330;n)$ să fie interesantă.

c) Aflați câte perechi de numere interesante de forma $(m;1000)$ sunt.

d) Determinați m și n astfel încât perechea $(m;n)$ să fie interesantă și m să aibă valoare minimă.

SOLUȚIE:

a) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{330}{1000} = 0,33 < 0,(3)$, contrazice $0,(3) < \dfrac{m}{n}$, deci $(330;1000)$ nu este interesantă 1p

b) $m=330 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{330}{n}<\frac{34}{100}$ 1p

$970,...<n<990 \Rightarrow n\in\{971;972;...;989\}$ 1p

c) $n=1000$, $\frac{1}{3}<\frac{m}{1000}<\frac{34}{100}$ 1p

$333<m<340 \Rightarrow m\in\{334;335;...;339\}$, 6 soluții 1p

d) $\frac{1}{3}<\frac{m}{n}<\frac{34}{100} \Leftrightarrow \frac{100m}{34}<n<3m$ 1p

cum n și $3m$ sunt numere naturale, există n numai dacă $\frac{100m}{34}<3m-1$, deci $m>17$, $m_{\min}=18$

și atunci $n=53$ 1p

Problema 3.

Un atlet aleargă în jurul unui teren de formă dreptunghiulară $ABCD$ cu lungimea de $150m$ și lățimea de $50m$, pe traseul $A\to B\to C\to D\to A\to B\to ...$ și fără a-și schimba sensul de alergat.

El pleacă din A cu zero puncte și de fiecare dată când ajunge într-unul din vârfurile $B,C,D,A,B,C,...$ primește puncte după următoarea regulă: câte 1 punct în B; câte 2 puncte în C; câte 3 puncte în D; câte 4 puncte în A.

a) Aflați în ce punct s-a aflat atletul în momentul în care a înregistrat 53 de puncte.
b) Determinați câți kilometri a parcurs atletul de la momentul plecării până când a înregistrat 53 de puncte.
c) Aflați dacă atletul poate obține exact 2018 puncte.

SOLUȚIE:

a) La prima parcurgere $A\to B\to C\to D$ atletul obține $1+2+3=6$ puncte 1p
și la fiecare parcurgere următoare $D\to A\to B\to C$ obține câte $4+1+2+3=10$ puncte 1p
După 5 parcurgeri complete $A\to B\to C\to D$ obține 46 puncte și este în D 1p
și continuând ajunge în A cu cu 50 puncte, în B cu 51 puncte, în C cu 53 puncte 1p

b) Atletul aleargă $(5\cdot P_{ABCD}+200)m=2,2Km$ 1p

c) Atletul poate obține puncte în una din variantele: $10n;10n+1;10n+3;10n+6$, $n\in\mathbb{N}$ 1p
și deoarece $2018=2010+8$, atletul nu poate înregistra 2018 puncte 1p

Problema 4.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M\in(DC)$, $N\in(BM)$ astfel încât $DM=3MC$ și $BN=4NM$.

a) Verificați că $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

c) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

d) Demonstrați că punctele A,N,C sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{AN}{NC}$.

SOLUȚIE:

a) $\overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari și de același sens, deci $\overrightarrow{MC}=\frac{MC}{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ 1p

b) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ 2p

c) $\overrightarrow{BN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ 1p

d) $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, deci A, N, C sunt coliniare 1p

$\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{NC}$, deci $\frac{AN}{NC} = 4$ 1p