MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Pentru fiecare $x\in(0;+\infty)$, considerăm numerele $a_n(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{21-n}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3)=27$.

c) Determinați $x\in(0;+\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x)=3$.

d) Demonstrați că, pentru o infinitate de valori $x\in(0;+\infty)$, toate numerele $a_n(x)$ sunt raționale.

SOLUȚIE:

a) $a_n(x)=x^{\frac{21-n}{2}}\cdot x^{\frac{n}{3}}=x^{\frac{63-n}{6}}$ 1p

pentru $n=63$, $a_{63}(x)=1$ nu depinde de x 1p

b) $a_n(3)=27 \Rightarrow \dfrac{63-n}{6}=3 \Rightarrow n=45$ 2p

c) $a_{45}(x)=3 \Rightarrow x^3=3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{3}$ 2p

d) pentru $x=2^{6k}$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow a_n(x)\in\mathbb{Q}$ 1p

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a=\dfrac{a+i}{1+a\cdot i}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $|z_a|=1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $z_a\neq -i$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\dfrac{4}{5}$.

d) Calculați produsul $p=z_1\cdot z_{\frac{1}{2}}\cdot z_{\frac{1}{3}}\cdot\ldots\cdot z_{\frac{1}{2018}}\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_{2018}$

SOLUȚIE:

a) $|z_a|=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{1+a^2}}=1$ 2p

b) $z_a=-i \Rightarrow a+i=-i+a$, fals 1p

c) $z_a = \dfrac{2a}{1+a^2} + \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \cdot i$ 1p

$\dfrac{1-a^2}{1+a^2} = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow a = -3$ sau $a = 3$ 1p

d) Observăm că $z_{\frac{1}{a}} = \dfrac{1+ai}{a+i} = \dfrac{1}{z_a}$, deci $z_{\frac{1}{a}} \cdot z_a = 1$, $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$ 1p

$\Rightarrow p = 1$ 1p

Problema 3.

Fie numărul real $a = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

a) Verificați $a^3 - 6a - 8 = 0$.

b) Demonstrați că $a \in \left(\sqrt{6};\, 3\right)$.

c) Demonstrați că numărul $x = \log_2\left(a^2-6\right) + \log_a\left(\dfrac{8}{a}+6\right) + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{a}$ este natural.

SOLUȚIE:

a) $a^3 = 4+2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}\right) = 8+6a$ 2p

b) Evident, $a > 0$ și din $8 = a\left(a^2-6\right) \Rightarrow a > \sqrt{6}$ 1p

Dacă $a \geq 3$, atunci $8 = a\left(a^2-6\right) \geq 9$, fals 1p

c) $x = \log_2 \dfrac{8}{a} + \log_a a^2 + \log_2 a$ 1p

$x = \log_2\left(\dfrac{8}{a} \cdot a\right) + 2$ 1p

$x = 5$ 1p

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime $15cm$ și pe care două mobile pornesc din același punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x) = x + 2^x - 1$ și $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

a) Demonstrați că $x \in M$ dacă și numai dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) + g(x) = 15n$.

b) Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.

c) Demonstrați că $x = 2^{68} - 1 \in M$.

SOLUȚIE:

a) Considerând $h : [0; +\infty)$, $h(x) = f(x) + g(x)$

$\Rightarrow$ $h(x) = 2x + 2^x + \log_2(x+1) - 1$ este funcție strict crescătoare, cu $h(0) = 0$ 1p

$\Rightarrow$ cum lungimea traseului este de $15cm$ și cele două mobile se deplasează pe traiectorie în sensuri opuse, are loc întâlnirea în fiecare moment $x > 0$ în care $h(x) = 15n$, $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

b) Cum $h(x) = f(x) + g(x)$ este strict crescătoare, cu $h(0) = 0$, prima întâlnire are loc la unicul moment $x > 0$ în care se verifică $h(x) = 15$ 1p

Folosind monotonia, se caută și se găsește $h(3) = 15$, deci $x = 3$ este momentul primei întâlniri 1p

c) $x=2^{68}-1\in M \iff h\left(2^{68}-1\right)=15n$, cu $n\in\mathbb{N}^*$ 1p

$h\left(2^{68}-1\right)=2\left(2^{68}-1\right)+2^{2^{68}-1}+67$, din care $h\left(2^{68}-1\right)=2\left(16^{17}-1\right)+8\left(16^{\left(2^{66}-1\right)}-1\right)+75$ 1p

dar $\left(16^{k}-1\right)\vdots 15$ $(\forall)k\in\mathbb{N}$ și implicit $h\left(2^{68}-1\right)\vdots 15$ 1p