MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $B = A - a \cdot I_3$.

b) Verificați $B^2 = B + 2I_3$ și $A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$.

c) Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ și determinați A^{-1}.

SOLUȚIE:

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B + 2I_3$ 1p

$A^2 = (aI_3 + B)^2 = a^2 I_3 + 2aB + B^2 = a^2 I_3 + 2a(A - aI_3) + (A - aI_3)^2 =$ 1p

$\ldots = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$ 1p

c) $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \ldots = (a+2)(a-1)^2$ 1p

$\det A \neq 0 \iff a \notin \{-2; 1\}$ 1p

Cum $A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$, $A^{-1} = \dfrac{2a+1}{a^2+a-2} \cdot I_3 - \dfrac{1}{a^2+a-2} \cdot A$ 1p

Problema 2.

Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ și determinantul $D(a,b,c)=\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy), considerăm punctele $A_n(n;n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că $D(a,b,c)=(b-a)(c-a)(c-b)$.

b) Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m,n,k, punctele $A_m(m;m^2)$, $A_n(n;n^2)$, $A_k(k;k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_mA_nA_k$ este număr natural.

c) Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018}A_nA_{n+2018}$ nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$.

d) Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_mA_nA_k$, cu $m,n,k \in \mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

SOLUȚIE:

a) Verificare $D(a,b,c)=\ldots=(b-a)(c-a)(c-b)$ 2p

b) $S(A_mA_nA_k)=\frac{1}{2}|D(m;n;k)|=\frac{1}{2}|(m-n)(m-k)(n-k)| \in \mathbb{N}$ deoarece din cele trei numere $m,n,k \in \mathbb{Z}$, două au aceeași paritate și astfel diferența lor este număr par, deci $|(m-n)(m-k)(n-k)| \vdots 2$ 2p

c) $A_{n-2018}A_nA_{n+2018}=\ldots=2018^3$ care nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$ 2p

d) Fără a afecta generalitatea, putem considera $m>n>k$ și atunci, în ipoteza $S(A_mA_nA_k)=2$, am avea $(m-n)(m-k)(n-k)=4$. Cum $m,n,k \in \mathbb{Z}$ sunt distincte $\Rightarrow$ $m-k>m-n\geq 1$ și $m-k>n-k\geq 1$, rezultând $m-k=4$ și $m-n=n-k=1$, imposibil 1p

Problema 3.

Două funcții f,g le numim *a-înrudite*, $a \in \mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]$.

a) Demonstrați că funcțiile $f(x)=\frac{x^3-x^2-2x-2}{x^2-1}$ și $g(x)=\frac{x-2}{x-1}$ sunt *2-înrudite.*

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ încât $f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}}{x^2-x}$ și $g(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie *a-înrudite.*

c) Dacă alegem trei funcții f,g,h încât f și g sunt *a-înrudite* iar g și h sunt *b-înrudite*, demonstrați că atunci f și h sunt *ab-înrudite.*

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-2g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x^2-2x-2}{x^2-1}-\frac{2x-4}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{3}{2}$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x-5}-a\sqrt{x}}{(x-1)\cdot x}$ este finită $\Leftrightarrow$ $a=3$ 1p

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5-5x}{(x-1)\cdot x\left(\sqrt{4x+5}+3\sqrt{x}\right)}=\ldots=-\frac{5}{6}$ 2p

c) $f(x)-ab\cdot h(x)=f(x)-a\cdot g(x)+a\left[g(x)-b\cdot h(x)\right]$ 1p

deci $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-ab\cdot h(x)\right]$ există și este finită 1p

Problema 4.

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ încât funcția $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+cx$ are domeniul maxim $\mathbb{R}$ și $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

a) Demonstrați că $a=2$, $b\in[1;+\infty)$ și $c=-1$.
b) Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.
c) Demonstrați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

SOLUȚIE:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}+cx\right)=1$ obligă $c=-1$, în caz contrar limita fiind infinită 1p

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}=\dfrac{a}{2}=1 \Rightarrow a=2$ 1p

din $x^2+ax+b\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbb{R} \Rightarrow b\in[1;+\infty)$ 1p

b) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+b}-x$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, fiind elementară, este continuă pe domeniul ei de definiție, deci nu are asimptote verticale și cum $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+b}-x\right)=1$, are la $+\infty$ asimptotă orizontală $y=1$.................... 1p

Cum $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+b}-x\right)=+\infty$, f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+b}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+b}+x}{-x}=-2 \Rightarrow m=-2$ 1p

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+b}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+b}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+b}{\sqrt{x^2-2x+b}+x}=-1$

$\Rightarrow$ $y=-2x-1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p

c) Dacă $f(x)=\sqrt{x^2+2x+b}-x$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ar fi funcție rațională, atunci asimptota spre $+\infty$, $y=1$, ar fi și asimptotă spre $-\infty$, contradicție cu $y=-2x-1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p