MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ cu legea de compoziție $x\circ y=3xy-2x+y-1$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați $(\mathbb{R};\circ)$ este structură neasociativă.

b) Stabiliți dacă $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Rezolvați în $(\mathbb{R};\circ)$ sistemul $\begin{cases}(x-1)\circ y=9\\(x+1)\circ(y-1)=13\end{cases}$

SOLUȚIE:

a) Structura este neasociativă dacă are loc $(x\circ y)\circ z\neq x\circ(y\circ z)$, măcar într-o situație particulară 1p

Verificare particulară, spre exemplu $(0\circ1)\circ2\neq0\circ(1\circ2)$ 1p

b) Dacă $e\in\mathbb{R}$ este element neutru, $x\circ e=e\circ x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și atunci

$x\circ e=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ e=1$ 1p

$e\circ x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 3ex-2e+x-1=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și împreună cu $e=1\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x=1\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ (!!!) contradicție, deci $(\mathbb{R};\circ)$ nu admite element neutru. 1p

c) $(x-1)\circ y=9\ \Leftrightarrow\ 3xy-2y-2x=8$ 1p

$(x-1)\circ y=9\ \Leftrightarrow\ 3xy+4y-5x=20$ 1p

Soluții $(x;y)=(2;3)$ și $(x;y)=(-4;0)$ 1p

Problema 2.

Fie matricele $X(a)=a\cdot A+I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G=\{X(a)/a>-1\}$.

a) Demonstrați că pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ se verifică $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.

b) Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.

c) Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2018)$.

SOLUȚIE:

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA^2$, dar $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=A$ și se confirmă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$ 1p

b) Înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G, deoarece din $a>-1$ și $b>-1$ se obține $(a+1)(b+1)>0$, din care $a+b+ab>-1$ 1p

Înmulțirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ este asociativă iar $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$ arată că în G înmulțirea este și comutativă 1p

$I_2=X(0)\in G$ este element neutru 1p

pentru $a>-1$, $\left[X(a)\right]^{-1}=X\left(\frac{-a}{a+1}\right)\in G$ 1p

c) Cum $X(a)\cdot X\left(\frac{-a}{a+1}\right)=I_2$, folosind comutativitatea și asociativitatea, produsul devine 1p

$\left[X(1)\cdot X\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[X(2)\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[X(2017)\cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\right]\cdot X(2018)=X(2018)$ 1p

Problema 3.

Considerăm funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $\int f(x)\,dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2)<F(3)$.

c) Demonstrați că funcția $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=|f(x)|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, acea primitivă G care verifică $G(1)=0$.

SOLUȚIE:

a) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$ 3p

b) $F'(x)=f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}>0$ pentru $x>1$, deci F este crescătoare pe $(1;+\infty)$ 1p

și astfel $F(2)<F(3)$ 1p

c) $g(x)=\begin{cases}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in(0;1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1;+\infty)\end{cases}\Rightarrow G(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x}(\ln x-2)+C_1, & x\in(0;1)\\ 2\sqrt{x}(\ln x-2)+C_2, & x\in[1;+\infty)\end{cases}$ 1p

G derivabilă, $G(1)=0\Rightarrow C_1=-4$, $C_2=4$ 1p

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t)=\frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

SOLUȚIE:

a) $B(t) = -3000 \cdot \int \frac{1}{(1+0,2t)^2} dt$ 2p

$B(t) = -\frac{3000}{0,2} \cdot \int \frac{0,2}{(1+0,2t)^2} dt = \frac{15.000}{1+0,2t} + C$ 2p

$t = 0 \Rightarrow B(0) = 15000 + C = 8000 \Rightarrow C = -7000$ 1p

$B(t) = \frac{15.000}{1+0,2t} - 7000 \leq 500$ 1p

din care $t \geq 5$ 1p