MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Pentru fiecare $x \in (0;+\infty)$, considerăm numerele $a_n(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{21-n} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3) = 27$.

c) Determinați $x \in (0;+\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x) = 3$.

d) Demonstrați că pentru o infinitate de valori $x \in (0;+\infty)$ șirul $a_n(x)$ are toți termenii numere raționale.

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a = \dfrac{a+i}{1+a\cdot i}$, unde $i^2 = -1$.

a) Demonstrați că $|z_a| = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $z_a \neq -i$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\dfrac{4}{5}$.

d) Calculați produsul $p = z_1 \cdot z_{\frac{1}{2}} \cdot z_{\frac{1}{3}} \cdot \ldots \cdot z_{\frac{1}{2018}} \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_{2018}$.

Problema 3.

Fie numărul real $a = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

a) Verificați $a^3 - 6a - 8 = 0$.

b) Demonstrați că $a \in \left(\sqrt{6};\, 3\right)$.

c) Demonstrați că numărul $x = \log_2\left(a^2-6\right) + \log_a\left(\dfrac{8}{a}+6\right) + \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{a}$ este natural.

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime $15\,cm$ și pe care două mobile pornesc din același punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x) = x + 2^x - 1$ și $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

a) Demonstrați că $x \in M$ dacă și numai dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) + g(x) = 15n$.

b) Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.

c) Demonstrați că $x = 2^{68} - 1 \in M$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*